

## Courbes paramétrées

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

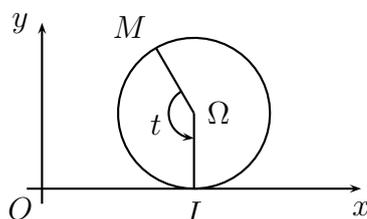
### Exercice 1 Quelques grands classiques

#### 1. (\*\*) L'astroïde.

- (a)  $a$  est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : 
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$
- (b) Pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on note  $A(t)$  et  $B(t)$  les points d'intersection de la tangente au point courant  $M(t)$  avec respectivement  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Calculer la longueur  $A(t)B(t)$ .

#### 2. (\*\*) La cycloïde.

- (a) Un cercle  $(\mathcal{C})$ , de rayon  $R > 0$ , roule sans glisser sur l'axe  $(Ox)$ . On note  $I$  le point de contact entre  $(\mathcal{C})$  et  $(Ox)$  et on note  $\Omega$  le centre de  $(\mathcal{C})$  ( $\Omega$  et  $I$  sont mobiles).  $M$  est un point donné de  $(\mathcal{C})$  ( $M$  est mobile, mais solidaire de  $(\mathcal{C})$ ). On pose  $t = ((\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}))$ .



Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point  $M$  (on prendra  $t$  pour paramètre).

- (b) Etudier et construire l'arc paramétré : 
$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$
 où  $R$  est un réel strictement positif donné.
3. (\*\*) **Une courbe de LISSAJOUS.** Etudier et construire l'arc paramétré : 
$$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$$
4. (\*\*) **La lemniscate de BERNOULLI.** Etudier et construire l'arc paramétré : 
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$
5. (\*\*\*) **Les tractrices.**
- (a) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon  $R$  ( $R > 0$  donné) et centrés sur  $(Ox)$ .
- (b) Etudier et construire l'arc paramétré : 
$$\begin{cases} x = R(\ln|\tan \frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R \sin t \end{cases}$$
 où  $R$  est un réel strictement positif donné.

**Exercice 2**

Construire les courbes de paramétrisations :

$$1. \begin{cases} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$$

Correction ▼

[005524]

**Exercice 3**

La courbe orthoptique d'une courbe ( $\mathcal{C}$ ) est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à ( $\mathcal{C}$ ), orthogonales. Déterminer l'orthoptique de ( $\mathcal{C}$ ) dans chacun des cas suivants :

$$1. (\mathcal{C}) \text{ est un astroïde de paramétrisation } \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, a > 0 \text{ donné.}$$

$$2. (\mathcal{C}) \text{ est l'arc paramétré : } \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}.$$

$$3. (\mathcal{C}) \text{ est l'ellipse d'équation } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b) \in ]0, +\infty[^2.$$

Correction ▼

[005525]

**Exercice 4**

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré :  $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$

[005526]

**Exercice 5**

Dans chacun des cas suivants, trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe proposée puis construire

$$1) x(y^2 - x^2) = 2y^2 - x^2 \quad 2) x^3 - y^3 + xy - 2x + 2y + 3 = 0$$

**Exercice 6**

Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

1. 
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

[005528]

**Exercice 7**

Soit  $T$  l'intersection de  $(Ox)$  et de la tangente en  $M$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(Ox)$ . Trouver les courbes telles que

1.  $MT = a$  ( $a > 0$  donné)
2.  $HT = a$  (sans rapport avec 1))

[005529]

**Correction de l'exercice 1 ▲**  
**(les grands classiques)**

---

1. L'astroïde.

(a) **Domaine d'étude.**

- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t)$  existe.
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t + 2\pi) = M(t)$ . Par suite, la courbe complète est obtenue quand  $t$  décrit un segment de longueur  $2\pi$  comme par exemple  $[-\pi, \pi]$ .
- Pour tout réel  $t$ ,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \cos^3(-t) \\ \sin^3(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \pi]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

- Pour tout réel  $t$ ,

$$M(t + \pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t + \pi) \\ \sin^3(t + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

La portion de courbe obtenue quand  $t$  décrit  $[-\pi, 0]$  est donc aussi la symétrique par rapport à  $O$  de la portion de courbe obtenue quand  $t$  décrit  $[0, \pi]$ . Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine d'étude.

- Pour tout réel  $t$ ,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \sin^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$ , puis par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

- Pour tout réel  $t$ ,

$$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite

d'équation  $y = x$ , puis d'axe  $(Oy)$  et enfin d'axe  $(Ox)$ .

**Variations conjointes de  $x$  et  $y$ .** La fonction  $t \mapsto x(t)$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et la fonction  $t \mapsto y(t)$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . **Etude des points singuliers.** Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \sin t \\ 3a\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a\cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel  $t$ , le vecteur  $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow 3a\cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

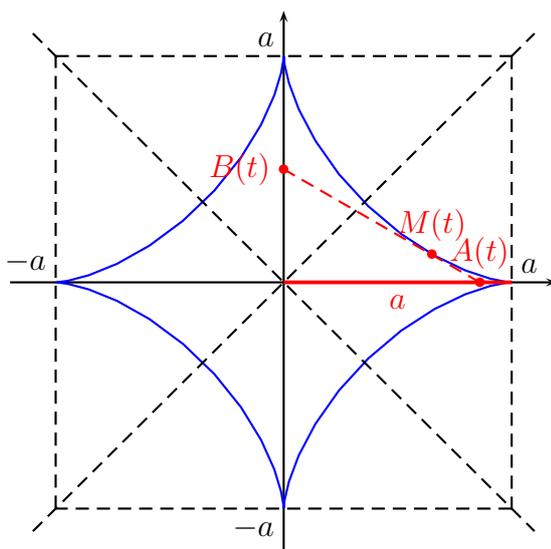
Les points singuliers sont donc les  $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour  $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ,  $M(t)$  est un point régulier et la tangente en  $M(t)$  est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ . Etudions alors le point singulier  $M(0)$ . Pour  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} &= \frac{a \sin^3 t}{a \cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \\ &= \frac{8 \sin^3 \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{-2 \sin^2 \frac{t}{2} (\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4 \sin \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1}, \end{aligned}$$

et donc,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$ . (Si on connaît déjà les équivalents, c'est plus court :  $\frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{-t^2 \times 3} = -\frac{2t}{3} \rightarrow 0$ ). La courbe admet en  $M(0)$  une tangente dirigée par le vecteur  $(1, 0)$ . Par symétrie, la courbe admet également une tangente en  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et  $M(\pi)$ , dirigée respectivement par  $(0, 1)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ . Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que

pour tout réel  $t$ , la tangente en  $M(t)$  est dirigée par le vecteur  $(-\cos t, \sin t)$ .

On en déduit la courbe.



- (b) Soit  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . On a vu que la tangente  $(T_t)$  en  $M(t)$  est dirigée par le vecteur  $(-\cos t, \sin t)$ . Une équation cartésienne de  $T_t$  est donc :  $-\sin t(x - a \cos^3 t) - \cos t(y - a \sin^3 t) = 0$ , ou encore

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t \quad (T_t).$$

On en déduit immédiatement que  $A(t)$  a pour coordonnées  $(a \cos t, 0)$  et que  $B(t)$  a pour coordonnées  $(0, a \sin t)$  puis que

$$\forall t \in ]0, \frac{\pi}{2}[, A(t)B(t) = a.$$

## 2. La cycloïde.

- (a) La condition de roulement sans glissement se traduit par  $\overline{OI} = MI$



ou encore  $x_\Omega = Rt$ . On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R \sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = R - R \cos t = R(1 - \cos t).$$

(b) **Domaine d'étude.**

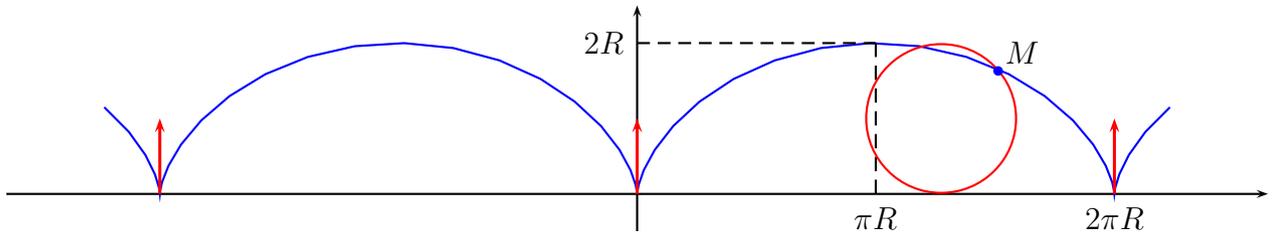
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t)$  existe.
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{u}$  où  $\vec{u}(2\pi R, 0)$ . Par suite, on trace la courbe quand  $t$  décrit  $[0, 2\pi]$  et la courbe complète est obtenue par translations de vecteurs  $k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$ . On trace la courbe quand  $t$  décrit  $[0, \pi]$ , puis on complète par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis par translations.

**Etude des points singuliers.** Pour  $t \in [0, \pi]$ ,  $x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$  et  $y'(t) = R \sin t = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ . Le point  $M(t)$  est régulier si et seulement si  $t \in ]0, \pi]$ . Dans ce cas, la tangente en  $M(t)$  est dirigée par  $\begin{pmatrix} 2R \sin^2(t/2) \\ 2R \sin(t/2) \cos(t/2) \end{pmatrix}$  ou encore par  $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ . Etudions également le point singulier  $M(0)$ . Pour  $t \in ]0, \pi]$ ,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{R(1 - \cos t)}{R(t - \sin t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi,  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = +\infty$  et la tangente en  $M(0)$  est dirigée par  $(0, 1)$ . Ainsi, dans tous les cas,

la tangente en  $M(t)$  est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ . Par symétrie,  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce. Sinon,  $x$  et  $y$  sont des fonctions croissantes sur  $[0, \pi]$ .



3. **une courbe de LISSAJOUS** **Domaine d'étude.**

- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t)$  existe.
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t + 2\pi) = M(t)$  et la courbe complète est obtenue quand  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$ .
- Pour tout réel  $t$ ,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \pi]$ , puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de

centre  $O$ .

- Pour tout réel  $t$ ,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe ( $Oy$ ) puis

par symétrie centrale de centre  $O$ .

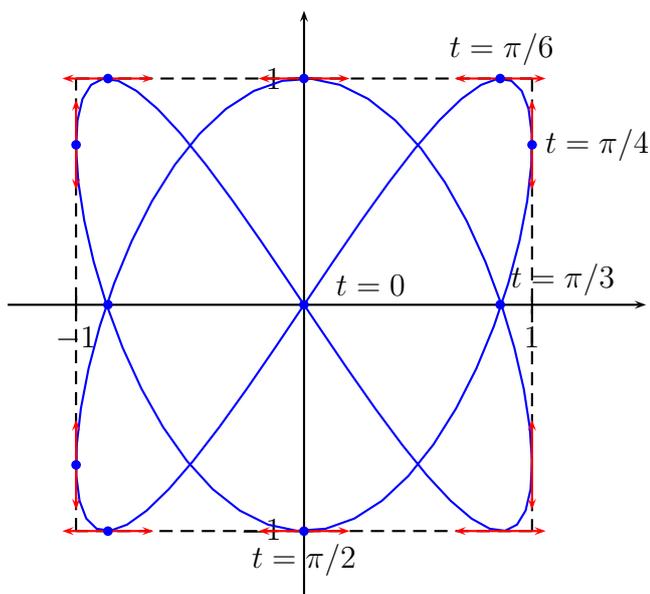
• On note aussi que  $M(t + \pi) = s_{(Ox)}(M(t))$ , mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine

d'étude.

**Variations conjointes de  $x$  et  $y$ .** Pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $x'(t) = 2\cos(2t)$  et  $y'(t) = 3\cos(3t)$ . On en déduit immédiatement le tableau suivant :

$t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		+	0	-
$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$y$	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$y'(t)$		+	0	-

puis on en déduit la courbe.



**Points multiples.** D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux vrais points multiples à déterminer, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de ( $Ox$ ) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel  $t$  de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Soit  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

Le point de la courbe qui est sur ( $Ox$ ) et qui a une abscisse strictement positive est le point  $M(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ . Sinon, on cherche  $t_1 \in ]0, \frac{\pi}{3}[$  et  $t_2 \in ]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}[$  tels que  $M(t_1) = M(t_2)$ .

$$M(t_1) = M(t_2) \Rightarrow x(t_1) = x(t_2) \Leftrightarrow t_2 \in t_1 + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \Rightarrow t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \\ \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 - \pi \Rightarrow t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1.$$

Réciproquement, si  $t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1$ , alors  $x(t_1) = x(t_2)$  et donc,

$$M(t_1) = M(t_2) \Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2} - t_1\right) = y(t_1) \Leftrightarrow \sin\left(3\left(-\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right) = \sin(3t_1) \\ \Leftrightarrow 3t_1 \in -\frac{3\pi}{2} - 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 3t_1 \in \pi + \frac{3\pi}{2} + 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 6t_1 \in -\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow t_1 \in -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{12}$$

Le point  $M\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

#### 4. La lemniscate de BERNOULLI **Domaine d'étude.**

- Pour tout réel  $t$ ,  $M(t)$  existe.
- Pour tout réel  $t$ ,  $M(-t) = s_O(M(t))$ . On étudie et construit la courbe quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}^+$  et on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre  $O$ .
- Pour  $t > 0$ ,

$$M\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^4}}, \frac{\frac{1}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^4}}\right) = \left(\frac{t^3}{1 + t^4}, \frac{t}{1 + t^4}\right) = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et construit la courbe quand  $t$  décrit  $[0, 1]$  et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite

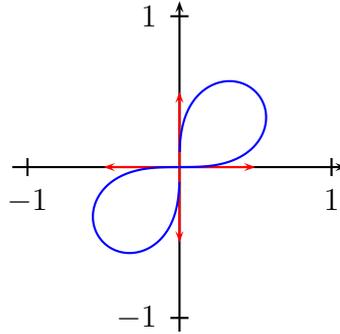
d'équation  $y = x$  puis par symétrie centrale de centre  $O$ . **Variations conjointes de  $x$  et  $y$ .** Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables sur  $[0, 1]$  et pour  $t \in [0, 1]$ ,

$$x'(t) = \frac{(1+t^4) - t(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{3t^2(1+t^4) - t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit immédiatement le tableau :

$t$	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$x'(t)$	+	0	-
$x$	0	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$y$	0		$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	+	

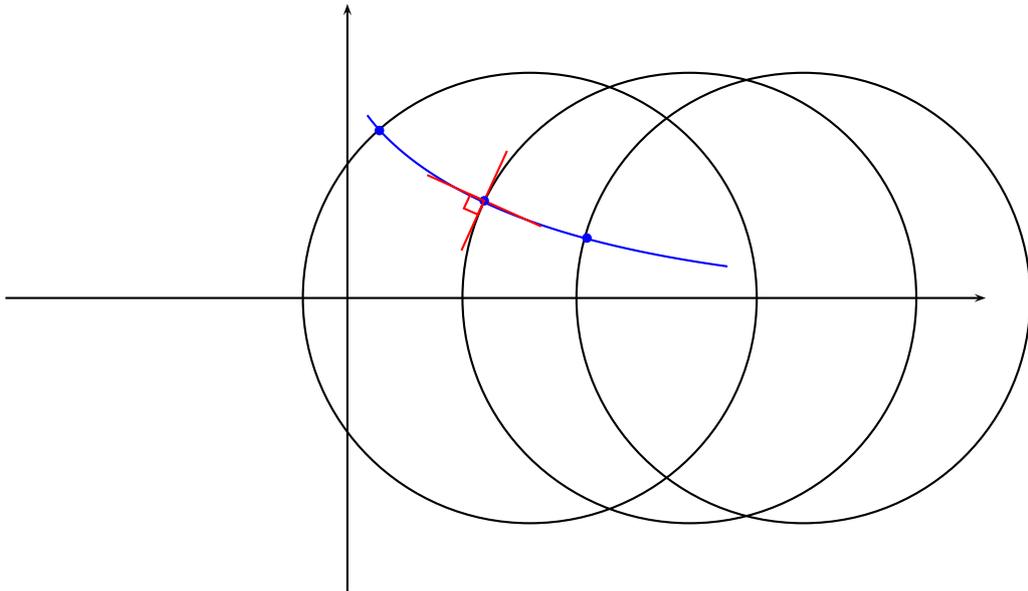
La tangente en  $M(0)$  est dirigée par le vecteur  $(1, 0)$ . Par symétrie, la tangente en  $M(+\infty)$  est dirigée par le vecteur  $(0, 1)$ .



### 5. Les tractrices

- (a) Cherchons les arcs solutions sous la forme  $\begin{cases} x = f(t) + R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$  où  $f$  est une fonction dérivable

sur un certain intervalle  $I$  (de sorte que le point  $M(t)$  est sur le cercle  $\mathcal{C}(t)$  de centre  $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$ ). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle  $\mathcal{C}(t)$  si et seulement si la tangente à cette trajectoire en  $M(t)$  est orthogonale à la tangente au cercle  $\mathcal{C}(t)$  en  $M(t)$  ou encore si et seulement si les vecteurs  $(f'(t) - R \sin t, R \cos t)$  et  $(-\sin t, \cos t)$  sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit  $-f'(t) \sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$  ou encore  $f'(t) = \frac{R}{\sin t}$  ou enfin,  $f(t) = R \ln |\tan \frac{t}{2}| + C$ . Les arcs solutions sont les arcs de la forme  $t \mapsto \begin{pmatrix} R(\ln |\tan \frac{t}{2}| + \cos t) + C \\ R \sin t \end{pmatrix}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .



Les courbes solutions se déduisent de la courbe  $t \mapsto \begin{pmatrix} R(\ln |\tan \frac{t}{2}| + \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix}$  par translations de vecteurs colinéaires à  $\vec{i}$ . On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

- (b) **Domaine d'étude.** La fonction  $t \mapsto M(t)$  est  $2\pi$ -périodique et on l'étudie donc sur  $[-\pi, \pi]$ . Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $M(t)$  existe si et seulement si  $t \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ . Pour  $t \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ ,  $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$  puis

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R(\ln |\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})| + \cos(\pi - t)) \\ R \sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-\ln |\tan \frac{t}{2}| - \cos t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand  $t$  décrit  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis par réflexion d'axe  $(Ox)$ . **Dérivée. Etude des points singuliers.** Pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) \\ R \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R \cos t \end{pmatrix} = R \frac{\cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite,  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ . Le point  $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est un point singulier. Quand  $t$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t - 1) = -R(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$ . D'autre part, posons  $h = \frac{\pi}{2} - t$  ou encore  $t = \frac{\pi}{2} - h$ . Quand  $t$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$x'(t) = R \frac{\cos^2 t}{\sin t} = R \frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

et donc par intégration,

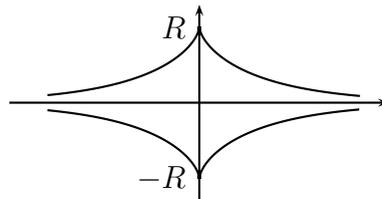
$$x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Comme d'autre part,  $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R(1 - \sin t) = -R(1 - \cos h) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$ , on en déduit que

$$\frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc  $\lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} = +\infty$ . Par symétrie d'axe  $(Oy)$ , la tangente en  $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est dirigée par  $\vec{j}$  et

$M\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est un point de rebroussement de première espèce. Sinon,  $x'$  et  $y'$  sont strictement positives sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . On en déduit que  $x$  et  $y$  sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures,  $x(t)$  tend vers  $-\infty$  et  $y(t)$  tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe. D'autre part,  $x$  croît de  $-\infty$  à 0 pendant que  $y$  croît de 0 à 1. **Courbe.**



## Correction de l'exercice 2 ▲

1. **Domaine d'étude.**  $M(t)$  existe si et seulement si  $t \notin \{-1, 1\}$ . Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction  $y$  est effectivement paire, mais  $x$  n'est ni paire ni impaire).

**Dérivée.** Pour  $t \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(3\ln|t| - 2\ln|t+1| - \ln|t-1|)' = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \left( \frac{3}{t} - \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) \\ &= \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \frac{3(t^2-1) - 2(t^2-t) - (t^2+t)}{t(t+1)(t-1)} = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}, \end{aligned}$$

et

$$y'(t) = \frac{2t(t^2 - 1) - 2t(t^2)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2},$$

ce qui reste vrai par continuité de  $x$  et  $y$  en 0.

**Etude des points singuliers.** Pour  $t \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ .  $M(0) = (0, 0)$  est l'unique point singulier. Pour  $t \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^2}{t^2 - 1} \frac{(t + 1)^2(t - 1)}{t^3} = \frac{t + 1}{t}.$$

Par suite,  $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures et vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en  $M(0)$  est dirigée par  $\vec{j}$  et d'autre part,  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce.

**Etude quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ .** Quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ ,  $M(t)$  tend vers le point  $(1, 1)$ . On prolonge la courbe en posant  $M(\infty) = (1, 1)$ . On a alors

$$\frac{y(t) - y(\infty)}{x(t) - x(\infty)} = \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} - 1\right) \left(\frac{t^3}{(t + 1)^2(t - 1)} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{t^2 - 1} \frac{(t + 1)^2(t - 1)}{-t^2 + t + 1} = \frac{t + 1}{-t^2 + t + 1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$  et la tangente en  $M(\infty)$  est dirigée par  $\vec{i}$ .

**Etude quand  $t$  tend vers 1.** Quand  $t$  tend vers 1,  $x(t) \sim 14(t - 1)$  et  $y(t) \sim \frac{1}{2(t - 1)}$ . Donc,  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini et il y a branche infinie. De plus,  $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$ . Puis,

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1} - 2 \frac{t^3}{(t + 1)^2(t - 1)} = \frac{t^2(t + 1) - 2t^3}{(t + 1)^2(t - 1)} = -\frac{t^2}{(t + 1)^2}.$$

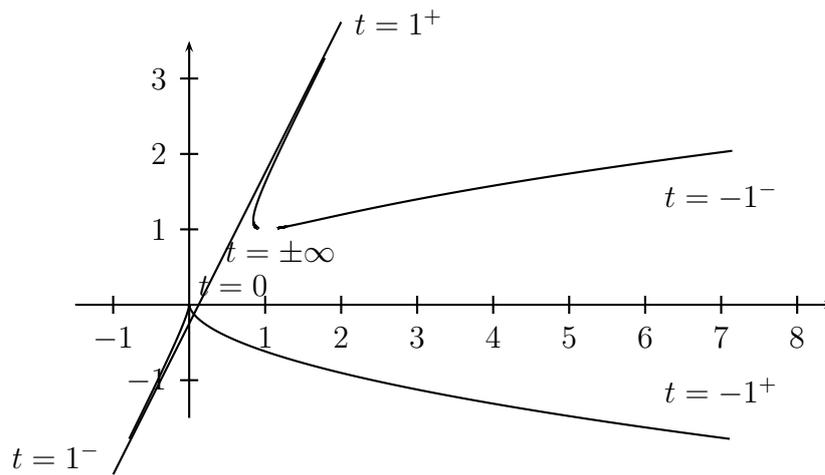
Cette dernière expression tend vers  $-\frac{1}{4}$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x - \frac{1}{4}$  est asymptote à la courbe.

**Etude quand  $t$  tend vers -1.** Quand  $t$  tend vers -1,  $x(t) \sim 12(t + 1)^2$  et  $y(t) \sim \frac{-1}{2(t + 1)}$ . Donc,  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini et il y a branche infinie. De plus,  $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t + 1)$ . Par suite,  $\frac{y(t)}{x(t)}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $-1$ . La courbe admet une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .

**Variations conjointes de  $x$  et  $y$ .** On rappelle que pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $x'(t) = \frac{t^2(t - 3)}{(t + 1)^3(t - 1)^2}$  et  $y'(t) = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}$ . On en déduit le tableau suivant :

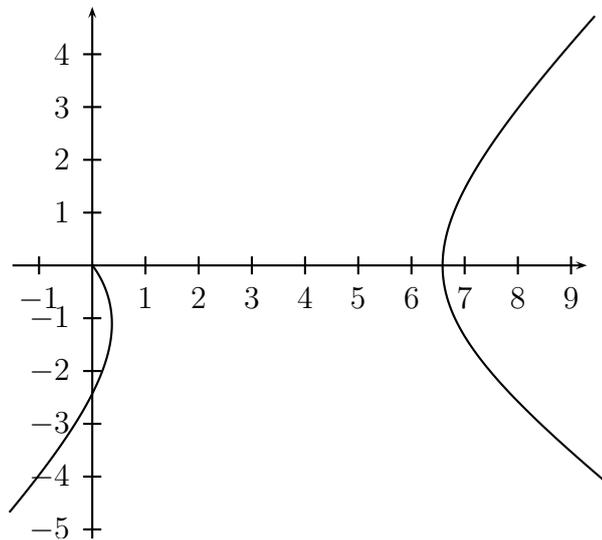
$t$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$3$	$+\infty$
$x'(t)$	+		- 0 -		- 0 +	
$x$	$1 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$0$	$+\infty \searrow -\infty$	$\frac{27}{32}$	$1$
$y$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	$0$	$+\infty \searrow -\infty$	$\frac{9}{8}$	$1$
$y'(t)$	+		+ 0 -		-	

On peut noter que la tangente en  $M(3)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{j}$ . Voir graphique page suivante.

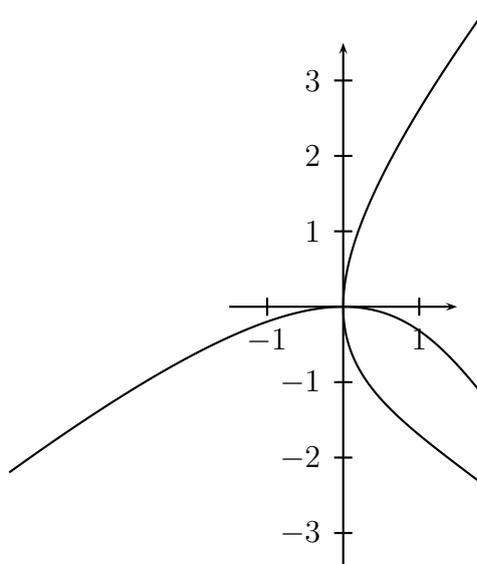


Dans la suite de cet exercice, je ne détaillerai que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

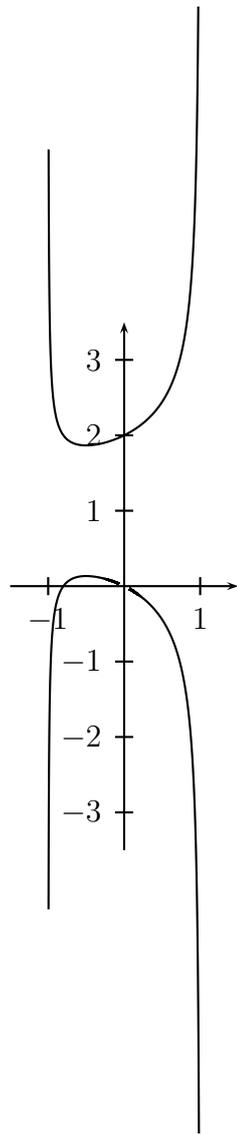
2.



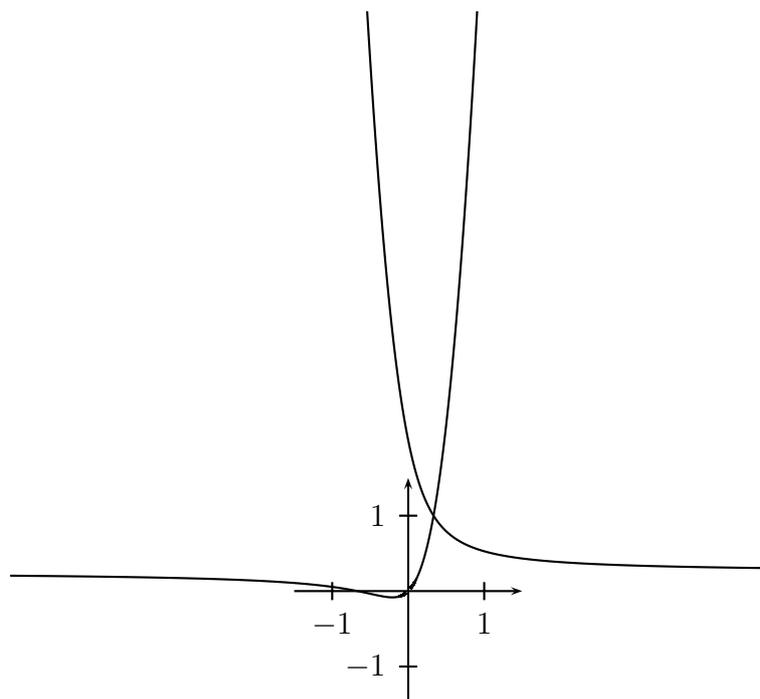
3.



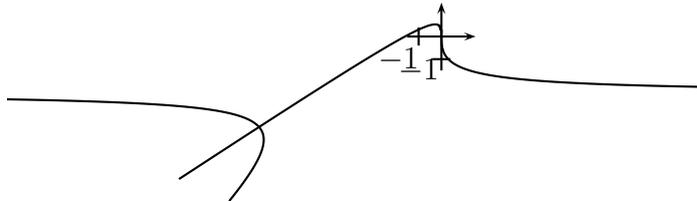
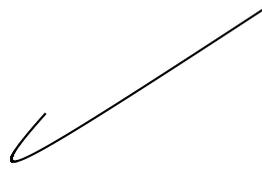
4. 
$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$$



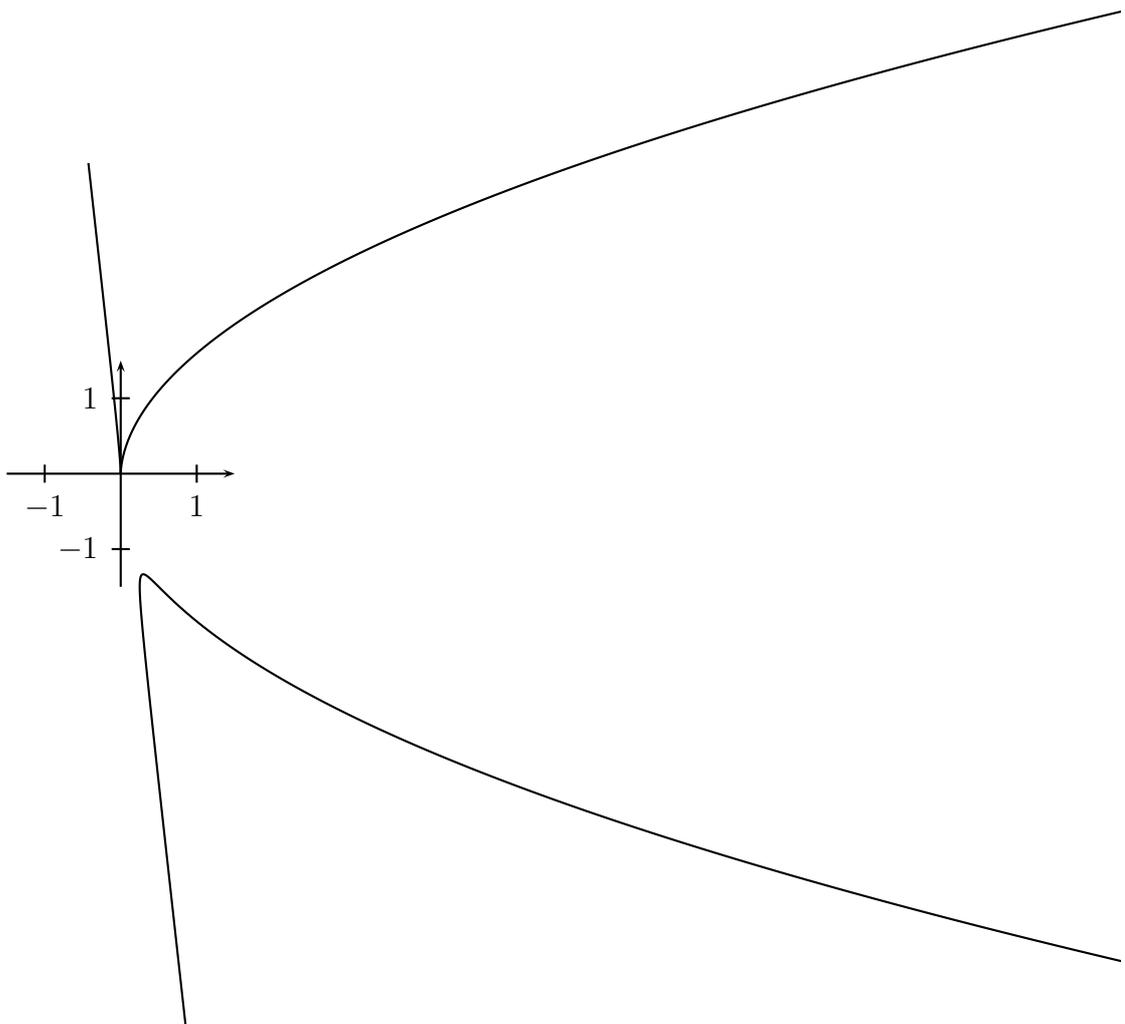
5.



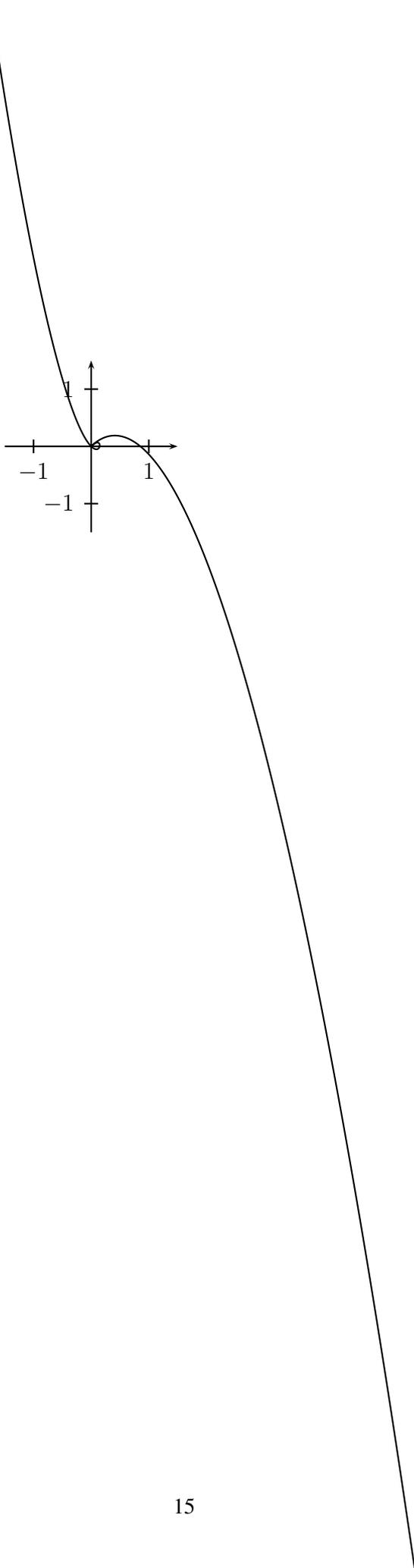
$$6. \begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$$



$$7. \begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$$



$$8. \begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$$



---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

---

1. On a vu dans l'exercice 1, que la tangente  $(T_t)$  en  $M(t)$  est toujours dirigée par le vecteur  $\vec{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$ . Une équation de la tangente en  $M(t)$  est donc  $\sin t(x - a\cos^3 t) + \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$  ou encore

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t (T_t).$$

Soit  $(t, u) \in [-\pi, \pi]^2$ .

$$(T_t) \perp (T_u) \Leftrightarrow \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(u) = 0 \Leftrightarrow \cos t \cos u + \sin t \sin u = 0 \Leftrightarrow \cos(t - u) = 0 \Leftrightarrow u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Il est alors clair que l'orthoptique est l'ensemble des points d'intersection des tangente  $(T_t)$  et  $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$  quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} M(x, y) (T_t) \cap (T_{t+\frac{\pi}{2}}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t \\ x \cos t - y \sin t = -a \sin t \cos t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = - \begin{vmatrix} a \sin t \cos t & \cos t \\ -a \sin t \cos t & -\sin t \end{vmatrix} \text{ et } y = - \begin{vmatrix} \sin t & a \sin t \cos t \\ \cos t & -a \sin t \cos t \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = a \sin t \cos t (-\cos t + \sin t) \text{ et } y = a \sin t \cos t (\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

L'orthoptique cherchée est la courbe  $t \mapsto \begin{pmatrix} a \sin t \cos t (-\cos t + \sin t) \\ a \sin t \cos t (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$ .

