



Géométrie analytique (affine ou euclidienne)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O, i, j, k) , on donne les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(2, 1, -1)$ et $D(1, 0, 4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD) .

[Correction ▼](#)

[005501]

Exercice 2 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O, i, j, k) , on donne : la droite (D) dont un système d'équations paramétriques

est $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$, le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, le plan P'

dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \end{cases}$, Etudier $D \cap P$ et $P \cap P'$

[Correction ▼](#)

[005502]

Exercice 3 **T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de \mathbb{R}^3 autour de $(1, 2, 2)$ qui transforme j en k .

[Correction ▼](#)

[005503]

Exercice 4 **T

Dans \mathbb{R}^3 , espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i, j, k) , déterminer l'image du plan d'équation $x + y = 0$ par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1, 1, 1)$,
3. par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1, 1, 1)$.

[Correction ▼](#)

[005504]

Exercice 5 *T

Dans \mathbb{R}^3 affine, déterminer un repère de la droite (D) $\begin{cases} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

[Correction ▼](#)

[005505]

Exercice 6 *T

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer l'intersection de (D) $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 7 \end{cases}$ et $(P) : x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Exercice 7 **

Dans \mathbb{R}^3 affine, déterminer le réel a pour que les droites $\begin{cases} x+2 = -2z \\ y = 3x+z \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+y-z = a \end{cases}$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

Correction ▼

[005507]

Exercice 8 **T

Dans \mathbb{R}^3 , équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$.

Correction ▼

[005508]

Exercice 9 **T

Dans \mathbb{R}^3 , soient $(D) \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{cases}$ et $(\Delta) : 6x = 2y = 3z$ puis $(P) : x + 3y + 2z = 6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ) .

Correction ▼

[005509]

Exercice 10 **

Dans \mathbb{R}^3 , soient $(D) \begin{cases} x-z-a = 0 \\ y+3z+1 = 0 \end{cases}$ et $(D') \begin{cases} x+2y+z-2b = 0 \\ 3x+3y+2z-7 = 0 \end{cases}$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction ▼

[005510]

Exercice 11 **

Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite $(D) : 2x = 3y = 6z$ et sécante aux droites $(D_1) : x = z - 4 = 0$ et $(D_2) : y = z + 4 = 0$.

Correction ▼

[005511]

Exercice 12 ***

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites $(D_1) : x - 1 = y = 0$, $(D_2) : y - 1 = z = 0$, $(D_3) : z - 1 = x = 0$ et $(D_4) : x = y = -6z$.

Correction ▼

[005512]

Exercice 13 **T

Dans \mathbb{R}^3 euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2, -2, 0)$, $B(4, 2, 6)$ et $C(-1, -3, 0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A, B, C) .

Correction ▼

[005513]

Exercice 14 **T

Soit $M(x, y, z)$ un point de \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite $(D) \begin{cases} x+y+z+1 = 0 \\ 2x+y+5z = 2 \end{cases}$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

Correction ▼

[005514]

Exercice 15 **T

Dans \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormé, soient $(D) \begin{cases} x+y+z+1 = 0 \\ 2x+y+5z = 2 \end{cases}$ et $(D') \begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+y-5z = 3 \end{cases}$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Exercice 16 **

Montrer que les plans $(P_1) : z - 2y = 5$, $(P_2) : 2x - 3z = 0$ et $(P_3) : 3y - x = 0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

Correction ▼

[005516]

Exercice 17 *T

Angle des plans $x + 2y + 2z = 3$ et $x + y = 0$.

Correction ▼

[005517]

Exercice 18 **T

Soient $(P_1) : 4x + 4y - 7z - 1 = 0$ et $(P_2) : 8x - 4y + z + 7 = 0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2) .

Correction ▼

[005518]

Exercice 19 **T

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') : $(D) \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D') \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$.

Correction ▼

[005519]

Exercice 20 **

Soient (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x + 3y + 2z = 6$. Déterminer la projetée (orthogonale) de (D) sur (P) .

Correction ▼

[005520]

Exercice 21 **I

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction ▼

[005521]

Exercice 22 **T

Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases}$.

Correction ▼

[005522]

Correction de l'exercice 1 ▲

• $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2, -3, -4)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{n}(2, -3, -4)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $2x - 3y - 4z = 0$. • $\vec{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(4, -9, -1)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{n}'(4, -9, -1)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $4x - 9y - z = 0$. • $-\vec{n} \wedge \vec{n}'$ a pour coordonnées $(33, 14, 6)$. Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(33, 14, 6)$. Un système d'équations cartésiennes de cette droite est
$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x - 9y - z = 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Les vecteurs $(2, -3, 1)$ et $(1, 2, 0)$ ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ x = 1 + 2(z - 1) + \mu \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2\mu \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 2z + 1 \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2(x - 2z + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Soit alors $M(2 + 3t, -t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (D)

$$M \in (P) \Leftrightarrow -2(2 + 3t) + (-t) + 7(1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 \times t - 1 = 0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc $(D) \cap (P) = \emptyset$. La droite (D) est strictement parallèle au plan (P) .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) \cap (P') &\Leftrightarrow \exists (v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3\eta \\ z = v + \eta \\ -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3\eta \\ z = v + \eta \\ -2(-5 - v) + (3 + v + 3\eta) + 7(v + \eta) - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \eta = -v - \frac{9}{10} \\ x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3(-v - \frac{9}{10}) \\ z = v + (-v - \frac{9}{10}) \end{cases} \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -v - 5 \\ y = -2v + \frac{3}{10} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point $(-5, \frac{3}{10}, -\frac{9}{10})$ et de vecteur directeur $(1, 2, 0)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$ (u est unitaire) et θ l'angle de r . r est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire u . On sait que pour tout vecteur v de \mathbb{R}^3

$$r(v) = (\cos \theta)v + (1 - \cos \theta)(v \cdot u)u + (\sin \theta)u \wedge v \quad (*)$$

et en particulier que $[v, r(v), u] = \sin \theta \|v \wedge u\|^2$. L'égalité $r(j) = k$ fournit

$$\sin \theta \|j \wedge u\|^2 = [j, r(j), u] = [u, j, k] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Comme $u \wedge j = \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j = -\frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$, on a $\|j \wedge u\|^2 = \frac{5}{9}$ et donc $\sin \theta = \frac{3}{5}$. L'égalité $r(j) = k$ fournit ensuite

$$k = (\cos \theta)j + (1 - \cos \theta) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j$$

En analysant la composante en i , on en déduit que $\frac{2}{9}(1 - \cos \theta) - \frac{2}{5} = 0$ et donc $\cos \theta = -\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 , l'égalité (*) s'écrit

$$\begin{aligned} r(v) &= -\frac{4}{5}(x, y, z) + \frac{9}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x + 2y + 2z)(1, 2, 2) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(2z - 2y, 2x - z, -2x + y) \\ &= \frac{1}{5}(-4x + (x + 2y + 2z) + (2z - 2y), -4y + 2(x + 2y + 2z) + (2x - z), -4z + 2(x + 2y + 2z) + (-2x + y)) \\ &= \frac{1}{5}(-3x + 4z, 4x + 3z, 5y) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons P le plan d'équation $x + y = 0$ dans la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. P est le plan de vecteur normal $n = i + j$.

- Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P' d'équation $x - y + z = 0$. $s(P)$ est le plan de vecteur normal $s(n)$. Or, le vecteur n est dans P' et donc $s(n) = n$ puis $s(P) = P$.

$$s(P) \text{ est le plan } P.$$

- Notons σ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $u = (1, 1, 1)$. $\sigma(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n) = 2 \frac{n \cdot u}{\|u\|^2} u - n = 2 \frac{2}{3}(1, 1, 1) - (1, 1, 0) = \frac{1}{3}(1, 1, 4).$$

$$\sigma(P) \text{ est le plan d'équation } x + y + 4z = 0.$$

- Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur unitaire $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. $r(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned} r(n) &= \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)n + \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)(n \cdot u)u + \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)u \wedge n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{2}{3}(1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{3}, 3 + 2(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)) \end{aligned}$$

$r(P)$ est le plan d'équation $(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})y + 2(\sqrt{2} - 1)z = 0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, on choisit d'exprimer x et z en fonction de y . Soit $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = y - 7 \\ -2x - 3z = 2y - 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 31 - 7y \\ z = -19 + 4y \end{cases} . \end{aligned}$$

(D) est la droite passant par $A(31, 0, -19)$ dirigée par le vecteur $u(-7, 1, 4)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $M(2 + \lambda, 3 - \lambda, 7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D) .

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2 + \lambda) + 3(3 - \lambda) - 5 \times 7 + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 12.$$

$(P) \cap (D)$ est donc un singleton. Pour $\lambda = 12$, on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$(P) \cap (D) = \{(14, -9, 7)\}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

• Repère de (D) .

$$\begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = 3(-2 - 2z) + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = -6 - 5z \end{cases}$$

(D) est la droite passant par $A(0, -1, -1)$ et dirigée par $u(2, 5, -1)$. • Repère de (D') .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = z - 1 \\ 2x + y = z + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + a - 1 \\ y = 2 - a - 3z \end{cases}$$

(D') est la droite passant par $A'(a - 1, 2 - a, 0)$ et dirigée par $u'(2, -3, 1)$. • Déjà u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A, u, u') . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4(y+1) - 16(z+1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 8z = -10.$$

• Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P) . Comme (D') est déjà parallèle à (P) , on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a-1) + 2(2-a) = -10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

(D) et (D') sont coplanaires si et seulement si $a = \frac{5}{3}$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $-x + 2y + 8z = -10$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Puisque P parallèle à la droite (Oy) , le vecteur $\vec{j} = (0, 1, 0)$ est dans \vec{P} . De même, le vecteur $\vec{AB} = (-1, 3, 1)$ est dans \vec{P} . P est donc nécessairement le plan passant par $A(0, -1, 2)$ et de vecteur normal $\vec{j} \wedge \vec{AB} = (1, 0, 1)$. Réciproquement, ce plan convient. Une équation de P est donc $(x - 0) + (z - 2) = 0$ ou encore $x + z = 2$.

Une équation du plan parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$ est $x + z = 2$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Notons p la projection sur (P) parallèlement à (Δ) . • Déterminons un repère de (D) .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x + 1 \\ 2y + z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x + 2 \end{cases}$$

(D) est la droite de repère (A, \vec{u}) où $A(0, -1, 2)$ et $\vec{u}(1, 2, -3)$. • (Δ) est dirigée par le vecteur $\vec{u}'(1, 3, 2)$. \vec{u} n'est pas colinéaire à \vec{u}' et donc (D) n'est pas parallèle à (Δ) . On en déduit que $p(D)$ est une droite. Plus précisément, $p(D)$ est la droite intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et parallèle à (Δ) . Déterminons une équation de (P') . Un repère de (P') est (A, \vec{u}, \vec{u}') . Donc

$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

Finalement

$p(D)$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$

Correction de l'exercice 10 ▲

• Repère de (D) .

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + z \\ y = -1 - 3z \end{cases}.$$

(D) est la droite passant par $A(a, -1, 0)$ et dirigée par $u(1, -3, 1)$. • Repère de (D') .

$$\begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 2b - x \\ 3y + 2z = 7 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4b - 7 + x \\ z = 14 - 6b - 3x \end{cases}$$

(D') est la droite passant par $A'(0, 4b - 7, -6b + 14)$ et dirigée par $u'(1, 1, -3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A, u, u') . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 1 & 1 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(x-a) + 4(y+1) + 4z = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a - 1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P) . Comme (D') est déjà parallèle à (P) , on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b-7) + (-6b+14) = 2a-1 \Leftrightarrow b = -a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b = -a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z = 2a-1$.

Correction de l'exercice 11 ▲

• (Δ) est parallèle à (D) si et seulement si (Δ) est dirigée par le vecteur $u(3,2,1)$ ou encore (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\begin{cases} x = a+3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = c+\lambda \end{cases}$. Ensuite, (Δ) est sécante à (D_1) si et seulement si on peut choisir le point (a,b,c) sur (D_1) ou encore si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$. Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / b+2\lambda = 4+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow b+2 \times (-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de (Δ) : un système d'équations paramétriques de (δ) est $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 16+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$.

Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est $\begin{cases} x = 3(z-4) \\ y = 16+2(z-4) \end{cases}$ ou encore

$$(\Delta) : \begin{cases} x - 3z + 12 = 0 \\ y - 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Notons (Δ) une éventuelle droite solution. • (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et par un point de la forme $(b,1,0)$ ou encore si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et est dirigée par un vecteur de la forme $(b-1,1,-a)$. Ainsi, (Δ) est sécante à (D_1) et

(D_2) si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\begin{cases} x = 1 + \lambda(b-1) \\ y = \lambda \\ z = a - \lambda a \end{cases}$ ou

encore un système d'équations cartésiennes de la forme $\begin{cases} x - (b-1)y = 1 \\ ay + z = a \end{cases}$.

• Ensuite, (Δ) et (D_3) sécantes $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \begin{cases} -(b-1)y = 1 \\ ay + 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow b \neq 1 \text{ et } -\frac{a}{b-1} + 1 = a \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } a = 1 - \frac{1}{b}$. En résumé, les droites sécantes à (D_1) , (D_2) et (D_3) sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x - (b-1)y = 1 \\ (1 - \frac{1}{b})y + z = 1 - \frac{1}{b} \end{cases}, b \notin \{0, 1\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - (b-1)y = 1 \\ (1 - \frac{1}{b})y + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -6z + 6(b-1)z = 1 \\ -6(1 - \frac{1}{b})z + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6 \left(1 - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{6(b-2)} + \frac{1}{6(b-2)} = 1 - \frac{1}{b} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6(b-1) + b = 6(b-1)(b-2) \Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } 6b^2 - 13b + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow b \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Les droites solutions sont $(\Delta_1) : \begin{cases} 3x + y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ et $(\Delta_2) : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

- Déterminons le centre de gravité G .

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(2, -2, 0) + \frac{1}{3}(4, 2, 6) + \frac{1}{3}(-1, -3, 0) = \left(\frac{5}{3}, -1, 2\right).$$

- Déterminons le centre du cercle circonscrit O . Une équation du plan (ABC) est $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $6(x-2) - 18(y+2) + 10z = 0$ ou enfin $3x - 9y + 5z = 24$. Posons alors $O(a, b, c)$. Ensuite, $OA = OB \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2 + (c-6)^2 \Leftrightarrow 4a + 8b + 12c = 48 \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 16$ et $OA = OC \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a+1)^2 + (b+3)^2 + c^2 \Leftrightarrow -6a - 2b = 2 \Leftrightarrow 3a + b = -1$. D'où le système

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3a - 9b + 5c = 24 \\ a + 2b + 3c = 16 \\ 3a + b = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 3a - 9(-3a - 1) + 5c = 24 \\ a + 2(-3a - 1) + 3c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 6a + c = 3 \\ -5a + 3c = 18 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ c = 3 - 6a \\ -5a + 3(3 - 6a) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{23} \\ b = \frac{4}{23} \\ c = \frac{123}{23} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right)$. • Déterminons l'orthocentre H . D'après la relation d'EULER,

$$H = O + 3\overrightarrow{OG} = \left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) + 3\left(-\frac{9}{23} - \frac{5}{3}, \frac{4}{23} + 1, \frac{123}{23} - 2\right) = \left(-\frac{151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right).$$

- Déterminons le centre du cercle inscrit I . On sait que $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ où $a = BC = \sqrt{5^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}$, $b = AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ et $c = AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{54}$. Donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}A + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}B + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}C \\
&= \left(\frac{2\sqrt{86} + 4\sqrt{10} - \sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86} + 2\sqrt{10} - 3\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}} \right).
\end{aligned}$$

Dans \mathbb{R}^3 euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2, -2, 0)$, $B(4, 2, 6)$ et $C(-1, -3, 0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A, B, C) .

$$G\left(\frac{5}{3}, -1, 2\right), O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(-\frac{151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right) \text{ puis}$$

$$I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).$$

Correction de l'exercice 14 ▲

- Déterminons un repère de (D) .

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{cases}.$$

Un repère de (D) est (A, \vec{u}) où $A(3, -4, 0)$ et $\vec{u}(-4, 3, 1)$. • Soit $M(x, y, z)$ un point du plan. On sait que

$$d(A, (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{(y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

- Notons \mathcal{C} le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(A, (D)) = 2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2 = 104$$

Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2 est
 $(y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2 = 104.$

Correction de l'exercice 15 ▲

- Déterminons un repère de (D) .

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+3 \\ y=3z-4 \end{cases}$$

Un repère de (D) est (A, \vec{u}) où $A(3, -4, 0)$ et $\vec{u}(-4, 3, 1)$. • Déterminons un repère de (D') .

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6z+1 \\ y=-7z+1 \end{cases}$$

Un repère de (D') est (A', \vec{u}') où $A'(1, 1, 0)$ et $\vec{u}'(6, -7, 1)$. • $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Puisque \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D') . • On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}([\vec{AA}', \vec{u}, \vec{u}'])}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|},$$

$$\text{avec } [\vec{AA}', \vec{u}, \vec{u}'] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times (-2) + 10 \times 5 = 30 \text{ et donc } d = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$d((D), (D')) = \sqrt{3}.$$

- Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\begin{cases} [\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \\ [\vec{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \end{cases}$. Or,

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1 \\ y+4 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-3) + 5(y+4) - 7z = 2x + 5y - 7z + 14,$$

et

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u}' \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1 \\ y-1 & -7 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8(x-1) - 5(y-1) + 13z = -8x - 5y + 13z + 13.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7z = -14 \\ 8x + 5y - 13z = 13 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

$\vec{u} \in \vec{P}_1 \cap \vec{P}_2 \cap \vec{P}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$. Ainsi, les plans (P_1) , (P_2) et (P_3) sont tous trois parallèles

à la droite affine (D) d'équations $\begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$. Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation $3x + y + 2z = 0$ est perpendiculaire à la droite (D) . Son intersection avec les plans (P_1) , (P_2) et (P_3) définit donc une section droite du prisme. • Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-5}{2} \\ x = \frac{3z}{2} \\ \frac{9}{2}z + \frac{z-5}{2} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{14} \\ y = -\frac{65}{28} \\ x = \frac{15}{28} \end{cases}$$

Notons $A(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14})$. • Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y + 5 \\ x = 3y \\ 9y + y + 2(2y + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{25}{7} \end{cases}$$

Notons $B(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7})$.

• Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_2) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Une section droite est OAB où $A(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14})$ et $B(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7})$. De plus

$$\begin{aligned} \text{aire de}(OAB) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \sqrt{63^2 + 21^2 + 42^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \times 21 \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}} \end{aligned}$$

L'aire d'une section droite est $\frac{75}{4\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient (P) le plan d'équation $x + 2y + 2z = 3$ et (P') le plan d'équation $x + y = 0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\vec{n}(1, 2, 2)$ et $\vec{n}'(1, 1, 0)$:

$$\left(\widehat{\vec{n}, \vec{n}'}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M, (P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ et } d(M, (P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) &\Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Leftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2 \\ &\Leftrightarrow ((4x+4y-7z-1) - (8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1) + (8x-4y+z+7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \Leftrightarrow x-2y+2z+2 = 0 \text{ ou } 2x-z+1 = 0. \end{aligned}$$

Les plans bissecteurs de (P_1) et (P_2) admettent pour équation cartésienne $x-2y+2z+2=0$ et $2x-z+1=0$.

Correction de l'exercice 19 ▲

• Déterminons un repère de (D) .

$$\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3z=-x-4 \\ z=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5x-1 \\ z=2x+1 \end{cases}$$

Un repère de (D) est (A, \vec{u}) où $A(0, -1, 1)$ et $\vec{u}(1, 5, 2)$. • Puisque un système d'équations de (D') est

$$\begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1 \end{cases}, \text{ un repère de } (D') \text{ est } (A', \vec{u}') \text{ où } A'(-1, -1, 0) \text{ et } \vec{u}'(1, 1, 1). \bullet \vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Puisque \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure

l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D') .

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\begin{cases} [\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \\ [\vec{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \end{cases}$. Or,

$$[\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -22x + 10(y+1) - 14(z-1) = -22x + 10y - 14z + 24,$$

et

$$[\vec{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5(x+1) + 7(y+1) - 2z = -5x + 7y - 2z + 2.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est

$$\begin{cases} 11x - 5y + 7z = 12 \\ 5x - 7y + 2z = 2 \end{cases} .$$

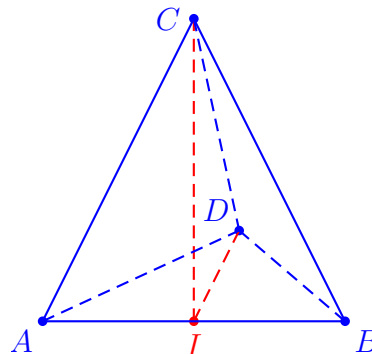
Correction de l'exercice 20 ▲

Notons p la projection orthogonale sur (P) . Un repère de (D) est (A, \vec{u}) où $A(0, -1, 2)$ et $\vec{u}(1, 2, -3)$. Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(1, 3, 2)$. \vec{u} et \vec{n} ne sont pas colinéaires et donc $p(D)$ est une droite du plan (P) . Plus précisément, $p(D)$ est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P) . Un repère de (P') est (A, \vec{u}, \vec{n}) . Donc

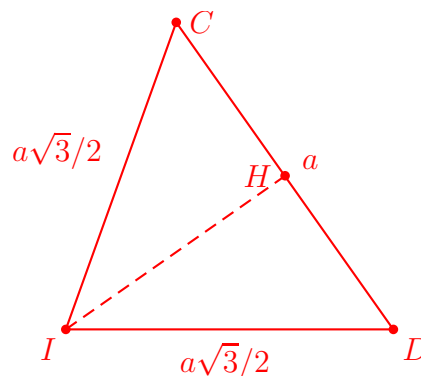
$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

La projetée orthogonale de (D) sur (P) est la droite d'équations $\begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases} .$

Correction de l'exercice 21 ▲



Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est 60° .



Angle entre une arête et une face. C'est l'angle \widehat{CDI} de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\dots^\circ.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle \widehat{CID} de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\dots^\circ.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Déterminons un repère de (D) .

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = y \\ y + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ z = x - \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Un repère de (D) est (A, \vec{u}) où $A\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$ et $\vec{u}(1, 0, 1)$. On sait alors que

$$d(O, (D)) = \frac{\|\vec{AO} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{3} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$d(O, (D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$
