# Produit scalaire, espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

**Exercice 1** ***

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}({}^tAA)$. Montrer que $N$ est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées $A$ et $B$. $N$ est-elle associée à un produit scalaire ?

Correction ▼ [005482]

**Exercice 2** ***

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $||\ ||$ une norme sur $E$ vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. On se propose de démontrer que $||\ ||$ est associée à un produit scalaire. On définit sur $E^2$ une application $f$ par : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

1. Montrer que pour tout $(x,y,z)$ de $E^3$, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout $(x,y)$ de $E^2$, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout $(x,y)$ de $E^2$ et tout rationnel $r$, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.

   On admettra que pour tout réel $\lambda$ et tout $(x,y)$ de $E^2$ on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ ( ce résultat provient de la continuité de $f$).
4. Montrer que pour tout $(u,v,w)$ de $E^3$, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que $f$ est bilinéaire.
6. Montrer que $||\ ||$ est une norme euclidienne.

Correction ▼ [005483]

**Exercice 3** **IT

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1,2,-1,1)$ et $V_2 = (0,3,1,-1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1,V_2)$. Déterminer une base orthonormale de $F$ et un système d'équations de $F^\perp$.

Correction ▼ [005484]

**Exercice 4** **

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il $A$ élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P|A = P(0)$ ?

Correction ▼ [005485]

**Exercice 5** ***I Matrices et déterminants de Gram

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $p$ sur $\mathbb{R}$ ($p \geqslant 2$). Pour $(x_1,\dots,x_n)$ donné dans $E^n$, on pose $G(x_1,\dots,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) et $\gamma(x_1,\dots,x_n) = \det(G(x_1,\dots,x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1,\dots,x_n)) = \text{rg}(x_1,\dots,x_n)$.

2. Montrer que $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,\dots,x_n) = 0$ et que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,\dots,x_n) > 0$.

3. On suppose que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre dans $E$ (et donc $n \leqslant p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

   Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de $x$ sur $F$ puis $d_F(x)$ la distance de $x$ à $F$ (c'est-à-dire $d_F(x) = ||x - p_F(x)||$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}$.

Correction ▼ [005486]

### Exercice 6 **I

Soit $a$ un vecteur non nul de l'espce euclidien $\mathbb{R}^3$. On définit $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que $f$ est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par $f$.

Correction ▼ [005487]

### Exercice 7 **I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a,b,c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [005488]

### Exercice 8 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Etudier les endomorphismes de matrice $A$ dans $\mathscr{B}$ suivants :

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [005489]

### Exercice 9 ***

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $a$, $b$ et $c$ réels. Montrer que $M$ est la matrice dans la base canonique orthonormée directe de $R^3$ d'une rotation si et seulement si $a$, $b$ et $c$ sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$. En posant $k = \frac{4\sin^2\varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices $M$ correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

Correction ▼ [005490]

### Exercice 10 **

$\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ donnée. Montrer que $\det_{\mathscr{B}}(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) = (\det_{\mathscr{B}}(u,v,w))^2$ pour tous vecteurs $u$, $v$ et $w$.

Correction ▼ [005491]

### Exercice 11 ***I Inégalité de Hadamard

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$, espace euclidien de dimension $n$. Montrer que : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)| \leqslant ||x_1||\dots||x_n||$ en précisant les cas d'égalité.

Correction ▼ [005492]

**Exercice 12** **

Montrer que $u \wedge v | w \wedge s = (u|w)(v|s) - (u|s)(v|w)$ et $(u \wedge v) \wedge (w \wedge s) = [u,v,s]w - [u,v,w]s$.

Correction ▼ [005493]

**Exercice 13** **I

Existence, unicité et calcul de $a$ et $b$ tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

Correction ▼ [005494]

**Exercice 14** ***

Soit $(e_1,...,e_n)$ une base quelconque de $E$ euclidien. Soient $a_1$,..., $a_n$ $n$ réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur $x$ tel que $\forall i \in \{1,...,\}$, $x|e_i = a_i$.

Correction ▼ [005495]

**Exercice 15** ****

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Une famille de $p$ vecteurs $(x_1,...,x_p)$ est dite obtusangle si et seulement si pour tout $(i,j)$ tel que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005496]

**Exercice 16** ***

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\, dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leqslant 1\} \leqslant 2$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005497]

**Exercice 17** **IT

Soit $r$ la rotation de $\mathbb{R}^3$, euclidien orienté, dont l'axe est orienté par $k$ unitaire et dont une mesure de l'angle est $\theta$. Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^3$, $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(k \wedge x) + 2(x.k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005498]

**Exercice 18** **

Soit $f$ continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\, dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Correction ▼ [005499]

**Exercice 19** ****I

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\, dt$.

1. Montrer que $(E,|)$ est un espace euclidien.
2. Pour $p$ entier naturel compris entre 0 et $n$, on pose $L_p = ((X^2-1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de $E$.

   Déterminer $||Lp||$.

Correction ▼ [005500]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Posons $\varphi\ :\ (A,B)\mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrons que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. **1ère solution.** • $\varphi$ est symétrique. En effet, pour $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}({}^tAB)=\mathrm{Tr}({}^t({}^tAB))=\mathrm{Tr}({}^tBA)=\varphi(B,A).$$

• $\varphi$ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, alors

$$\varphi(A,A)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}a_{i,j}\right)=\sum_{i,j}a_{i,j}^2>0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. $\varphi$ est donc définie, positive.

**2ème solution.** Posons $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}({}^tAB)=\textstyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, $\varphi$ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $N$ n'est autre que la norme associée au produit scalaire $\varphi$ (et en particulier, $N$ est une norme). Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}N(AB)^2&=\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\&\leqslant\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}b_{l,j}^2\right)\ \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\&=\sum_{i,j,k,l}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{i,k}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j}b_{l,j}^2\right)=N(A)^2N(B)^2,\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB)\leqslant N(A)N(B).}$$

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

1. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}f(x+z,y)+f(x-z,y)&=\frac{1}{4}(||x+z+y||^2+||x-z+y||^2-||x+z-y||^2-||x-z-y||^2)\\&=\frac{1}{4}\left(2(||x+y||^2+||z||^2)-2(||x-y||^2+||z||^2)\right)=2f(x,y).\end{aligned}$$

2. $2f(x,y)=f(x+x,y)+f(x-x,y)=f(2x,y)+f(0,y)$ mais $f(0,y)=(||y||^2-||-y||^2)=0$ (définition d'une norme).

3. • Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ f(nx,y)=nf(x,y)$. C'est clair pour $n=0$ et $n=1$. Soit $n\geqslant0$. Si l'égalité est vraie pour $n$ et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x,y)+f(nx,y)=f((n+1)x+x,y)+f((n+1)x-x,y)=2f((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y)=2f((n+1)x,y)-f(nx,y)=2(n+1)f(x,y)-nf(x,y)=(n+2)f(x,y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x,y)=f\left(n\times\frac{1}{n}.x,y\right)=nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}f(x,y)$. • Soit alors $r=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $f(rx,y)=\frac{1}{q}f(px,y)=p\frac{1}{q}f(x,y)=rf(x,y)$ et donc, pour tout rationnel positif $r$, $f(rx,y)=rf(x,y)$. Enfin, si $r\leqslant 0$, $f(rx,y)+f(-rx,y)=2f(0,y)=0$ (d'après 1)) et donc= $f(-rx,y)=-f(-rx,y)=rf(x,y)$.

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ f(rx,y)=rf(x,y).$$

4. On pose $x=\frac{1}{2}(u+v)$ et $y=\frac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w)+f(v,w)=f(x+y,w)+f(x-y,w)=2f(x,w)=2f\left(\frac{1}{2}(u+v),w\right)=f(u+v,w).$$

5. f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)). Donc f est bilinéaire.

6. f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x\in E$, $f(x,x)=\frac{1}{4}(||x+x||^2+||x-x||^2)=\frac{1}{4}||2x||^2=||x||^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que $f$ est définie positive et donc un produit scalaire, et que $||\ ||$ est la norme associée. $||\ ||$ est donc une norme euclidienne.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

La famille $(V_1,V_2)$ est clairement libre et donc une base de $F$. Son orthonormalisée $(e_1,e_2)$ est une base orthonormée de $F$. $||V_1||=\sqrt{1+4+1+1}=\sqrt{7}$ et $e_1=\frac{1}{\sqrt{7}}V_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$. $(V_2|e_1)=\frac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1)=\frac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2-(V_2|e_1)e_1=(0,3,1,-1)-\frac{4}{7}(1,2,-1,1)=\frac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis $e_2=\frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Une base orthonormée de $F$ est $(e_1,e_2)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2=\frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in F^\perp\Leftrightarrow(x,y,z,t)\in(V_1,V_2)^\perp\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t=0\\3y+z-t=0\end{array}\right..$$

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

Soit $A$ un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)A(t)\,dt=P(0)$.
$P=1$ fournit $\int_0^1 A(t)\,dt=1$ et donc nécessairement $A\neq 0$. $P=XA$ fournit $\int_0^1 tA^2(t)\,dt=P(0)=0$. Mais alors, $\forall t\in[0,1]$, $tA^2(t)=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A=0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). $A$ n'existe pas.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

1. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $E$ et $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ ($M$ est une matrice de format $(p,n)$). Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes $C_i$ et $C_j$ est encore $x_i|x_j$. Donc, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j=x_i|x_j$ ou encore

$$\boxed{G={}^tMM.}$$

Il s'agit alors de montrer que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que $M$ et ${}^tMM$ ont même noyau. En effet, pour $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X\in\mathrm{Ker}M\Rightarrow MX=0\Rightarrow{}^tM\times MX=0\Rightarrow({}^tMM)X=0\Rightarrow X\in\mathrm{Ker}({}^tMM)$$

et

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow ||MX||^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$$
$$\Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Ainsi, $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}(G(x_1,\dots,x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1,\dots,x_n) = \text{rg}(M) = \text{rg}(G(x_1,\dots,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1,\dots,x_n)) = \text{rg}(x_1,\dots,x_n).}$$

2. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, $\text{rg}(G) = \text{rg}(x_1,...,x_n) < n$, et donc, puisque $G$ est une matrice carrée de format $n$, $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G) = 0$. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, $(x_1,...,x_n)$ engendre un espace $F$ de dimension $n$. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $F$ et $M$ la matrice de la famille $(x_1,...,x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G = {}^tMM$ et d'autre part, $M$ est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3. On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x,x_1,...,x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ||x||^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||x-p_F(x)+p_F(x)||^2 \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_1 \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||x-p_F(x)||^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ||p_F(x)||^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x,x_1,...,x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x),x_1,...,x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x),x_1,...,x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x,x_1,...,x_n) = ||x-p_F(x)||^2\gamma(x_1,...,x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x,F) = \|x-p_F(x)\| = \sqrt{\tfrac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}}.}$$

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si $x$ est colinéaire à $a$, $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\text{Vect}(a) \setminus \{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si $x$ n'est pas colinéaire à $a$, $a \wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à $a$ et il en est de même de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Donc, si $x$ est colinéaire à $f(x)$, $x$ est nécessairement orthogonal à $a$. Réciproquement, si $x$ est un vecteur non nul orthogonal à $a$, $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2x = -||a||^2x$ et $x$ est colinéaire à $f(x)$. Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(a)$ et de $a^\perp$.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

Un vecteur engendrant $D$ est $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p((x,y,z)) = \frac{(x,y,z)|(2,1,3)}{||(2,1,3)||^2}(2,1,3) = \frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3).$$

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}p = P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, puis $\text{Mat}_{\mathscr{B}}s = 2P - I = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $(a,b,c)$ dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax+by+cz=0$ dans la base canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$.

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

---

1. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et $f$ est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de $f$.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y-2z=0 \\ -2x-5y-z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-5y \\ 3x+9y=0 \\ 9x+27y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3y \\ z=y \end{array}\right. .$$

L'axe $D$ de $f$ est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (-3,1,1)$. $D$ est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de $f$.** Le vecteur $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}.f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm\arccos(-\frac{5}{6})\ (2\pi)$. (Si on sait que $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$, c'est plus court : $2\cos\theta + 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ fournit $\cos\theta = -\frac{5}{6}$). Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0.$

Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } -\arccos(-\tfrac{5}{6}) \text{ autour de } u = (-3,1,1).}$$

2. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et $f$ est une rotation. **Axe de $f$.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+\sqrt{6}z=0 \\ x-y-\sqrt{6}z=0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y=\sqrt{6}z=\frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x=y \text{ et } z=0.$$

L'axe $D$ de $f$ est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. $D$ est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de $f$.** $\overrightarrow{k} = [0,0,1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}.f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1).\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\left[\overrightarrow{i},f(\overrightarrow{i}),\overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$.

Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ autour de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

3. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. $A$ n'est pas symétrique, et donc $f$ n'est pas une réflexion. $f$ est donc la composée commutative $s\circ r$ d'une rotation d'angle $\theta$ autour d'un certain vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\theta$ sont à déterminer. **Axe de $r$.** L'axe de $r$ est $Ker(f+Id_E)$ (car $f \neq -Id_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 17x+y+4z=0 \\ -4x+13y+7z=0 \\ x+8y+5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-17x-4z \\ -225x-45z=0 \\ -135x-27z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-5x \\ y=3x \end{array}\right.$$

$\text{Ker}(f+Id_E) = \text{Vect}(\overrightarrow{u}) = D$ où $u = (1,3,-5)$. $D$ est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. $s$ est la réflexion par rapport au plan $P = u^{\perp}$ dont une équation est $x+3y-5z=0$. On écrit alors la matrice $S$ de $s$ dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de $r$ et on termine comme en 1) et 2).

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation} &\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ||C_1|| = ||C_2|| = ||C_3|| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 1 \text{ et } ab+bc+ca = 0 \text{ et } a^3+b^3+c^3-3abc = 1. \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ba^2+a^2c+ca^2+b^2c+c^2b)+6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = -2(a^3+b^3+c^3)+6\sigma_3$$

et finalement, $a^3+b^3+c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$\begin{aligned} M \in O_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow a,\ b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3). \end{aligned}$$

Posons $P(x)=x^3-x^2+k$ et donc $P'(x)=3x^2-2x=x(2x-3)$. Sur $]-\infty,0]$, $P$ est strictement croissante, strictement décroissante sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$. $P$ admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si $P(0)=k>0$ et $P\left(\frac{2}{3}\right)=k-\frac{4}{27}<0$ ou ce qui revient au même, $0<k<\frac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes ($P$ étant d'autre part continue sur $\mathbb{R}$), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si $k\in\left\{0,\frac{4}{27}\right\}$, $P$ et $P'$ ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\frac{4}{27}$) et $P$ admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si $k<0$ ou $k>\frac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc $P$ admet deux autres racines non réelles. En résumé, $P$ a toutes ses racines réelles si et seulement si $0\leqslant k\leqslant\frac{4}{27}$ et donc, $f$ est une rotation si et seulement si $a$, $b$ et $c$ sont les solutions d'une équation du type $x^3-x^2+k=0$ où $0\leqslant k\leqslant\frac{4}{27}$.

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

$$\begin{aligned}[u\wedge v,v\wedge w,w\wedge u]&=((u\wedge v)\wedge(v\wedge w))|(w\wedge u)=(((u\wedge v)|w)v-((u\wedge v)|v)w)|(w\wedge u)\\&=(((u\wedge v)|w)v)|(w\wedge u)=((u\wedge v)w)\times(v|(w\wedge u))=[u,v,w][w,u,v]\\&=[u,v,w]^2.\end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre et donc une base de E, considérons $\mathscr{B}'=(e_1,...,e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=\left|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right|=|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|,$$

car $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ est le déterminant d'une d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou $-1$. Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|=\left|\prod_{i=1}^{n}(x_i|e_i)\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\times\|e_i\|=\prod_{i=1}^{n}||x_i||,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout $i$, $|x_i|e_i|=\|x_i\|\times\|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout $i$, $x_i$ est colinéaire à $e_i$ ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

$(u\wedge v)|(w\wedge s)=[u,v,w\wedge s]=[w\wedge s,u,v]=((w\wedge s)\wedge u)|v=((u|w)s-(u|s)w)|v=(u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$. De même, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s)=((u\wedge v)|s)w-((u\wedge v)|w)s=[u,v,s]w-[u,v,w]s$.

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

**1ère solution.**

$$\begin{aligned}\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx&=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36}=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geqslant\frac{4}{225},\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a+\frac{1}{2}(3b-1)=b+\frac{1}{5}=0$ ou encore $b=-\frac{1}{5}$ et $a=\frac{4}{5}$.

$\boxed{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx \text{ est minimum pour } a=\frac{4}{5} \text{ et } b=-\frac{1}{5} \text{ et ce minimum vaut } \frac{4}{225}.}$

**2ème solution.** $(P,Q)\mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1 (x^4-ax-b)^2 dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme $X^4$ au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX+b$. On doit calculer $\text{Inf}\left\{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de $X^4$ à $F=\mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX+b$ est la projection orthogonale de $X^4$ sur $F$. Trouvons une base orthonormale de $F$. L'orthonormalisée $(P_0,P_1)$ de $(1,X)$ convient. $||1||^2=\int_0^1 1\,dt=1$ et $P_0=1$. Puis $X-(X|P_0)P_0=X-\int_0^1 t\,dt=X-\frac{1}{2}$, et comme $||X-(X|P_0)P_0||^2=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $P_1=2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1)$. La projection orthogonale de $X^4$ sur $F$ est alors $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0)=\int_0^1 t^4\,dt=\frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1)=\sqrt{3}\int_0^1 t^4(2t-1)\,dt=\sqrt{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de $X^4$ sur $F$ est $\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1)=\frac{1}{5}(4X-1)$. Le minimum cherché est alors $\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2 dt=\ldots=\frac{4}{225}$.

## Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x|e_1,\ldots,x|e_n)\end{array}$. $\varphi$ est clairement linéaire et $\text{Ker}\varphi$ est $(e_1,\ldots,e_n)^\perp=E^\perp=\{0\}$. Comme $E$ et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout $n$-uplet $(a_1,\ldots,a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur $x$ tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x|e_i=a_i$.

## Correction de l'exercice 15 ▲

**1ère solution.** Montrons par récurrence que sur $n=\dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, $p\leqslant n+1$. • Pour $n=1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs $x_1$ et $x_2$ verifiant $x_1.x_2<0$, un vecteur $x_3$ quelconque est soit nul (auquel cas $x_3.x_1=0$), soit de même sens que $x_1$ (auquel cas $x_1.x_3>0$) soit de même sens que $x_2$ (auquel cas $x_2.x_3>0$). Donc $p\leqslant 2$. • Soit $n\geqslant 1$. Suppososons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension $n$ a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille obtusangle d'un espace $E$ de dimension $n+1$. Si $p=1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p\geqslant 2$. $x_p$ n'est pas nul et $H=x_p^\perp$ est un hyperplan de $E$ et donc est de dimension $n$. Soit, pour $1\leqslant i\leqslant p-1$, $y_i=x_i-\frac{(x_i|x_p)}{||x_p||^2}x_p$ le projeté orthogonal de $x_i$ sur $H$. Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i,j)\in[\![1,p-1]\!]$ tel que $i\neq j$.

$$y_i.y_j=x_i.x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}-\frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2}+\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4}=x_i|x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}<0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p-1\leqslant 1+\dim H=n+1$ et donc $p\leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i=0$ $(*)$. Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par $-1$, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i>0$. Soit $I$ l'ensemble des indices $i$ tels que $\lambda_i>0$ et $J$ l'ensemble des indices $i$ tels que $\lambda_i\leqslant 0$ (éventuellement $J$ est vide). $I$ et $J$ sont disjoints. (*) s'écrit $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i$ (si $J$ est vide, le second membre est nul). On a

$$0\leqslant\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2=\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).\left(-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i(-\lambda_j)x_i.x_j\leqslant 0.$$

Donc, $||\sum_{i\in I}\lambda_i x_i||^2=0$ puis $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$. Mais, en faisant le produit scalaire avec $x_p$, on obtient $\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i(x_i.x_p)<0$ ce qui est une contradiction. La famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension $n$ et donc $p\leqslant n+1$.

## Correction de l'exercice 16 ▲

L'application $(P,Q)\mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de $E$. Pour cela, déterminons $(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3)$ l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(1,X,X^2,X^3)$.

• $||P_0||^2=\int_{-1}^1 1^2\,dt=2$ et on prend $\boxed{Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}.}$ • $P_1|Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t\,dt=0$ puis $P_1-(P_1|Q_0)Q_0=X$ puis $||P_1-(P_1|Q_0)Q_0||^2=\int_{-1}^1 t^2\,dt=\frac{2}{3}$ et $\boxed{Q_1=\sqrt{\frac{3}{2}}X.}$ • $P_2|Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t^2\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1=0$. Donc, $P_2-(P_2|Q_0)Q_0-(P_2|Q_1)Q_1=X^2-\frac{1}{3}$, puis $||P_2-(P_2|Q_0)Q_0-(P_2|Q_1)Q_1||^2=\int_{-1}^1\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\,dt=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{45}$ et $\boxed{Q_2=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1).}$ • $P_3|Q_0=P_3|Q_2=0$ et $P_3|Q_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 t^4\,dt=\frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3-(P_3|Q_0)Q_0-(P_3|Q_1)Q_1-(P_3|Q_2)Q_2=X^3-\frac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2=\int_{-1}^1\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2\,dt=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right)=2\frac{25-21}{175}=\frac{8}{175}$, et $\boxed{Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X).}$

Une base orthonormée de $E$ est $(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3)$ où $Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ et $Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)$. Soit alors $P$ un élément quelconque de $E=\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt=1$. Posons $P=aQ_0+bQ_1+cQ_2+dQ_3$. Puisque $(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base orthonormée de $E$, $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt=||P||^2=a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Maintenant, pour $x\in[-1,1]$, en posant $M_i=\text{Max}\{|Q_i(x)|,\ x\in[-1,1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}|P(x)|&\leqslant|a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)|\leqslant|a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en 1 (et $-1$) et donc

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leqslant2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant2\sqrt{2}$. Etudions les cas d'égalité. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant2\sqrt{2}$. Soit $x_0\in[-1,1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}=|P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}=|P(x_0)|&\leqslant|a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)|\leqslant|a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leqslant\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ est colinéaire à $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ ou encore si et seulement si $P$ est de la forme $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1+3+5+7)=1$ et donc $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0\in\{-1,1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)|=|a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que $a$, $b$, $c$ et $d$ aient même signe et $P$ est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3)&=\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\&=\pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3)\end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

---

Si $x$ est colinéaire à $k$, $r(x)=x$, et si $x\in k^\perp$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x$. Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ où $x_1\in k^\perp$ et $x_2\in \text{Vect}(k)$. On a $x_2=(x.k)k$ (car $k$ est unitaire) et $x_1=x-(x.k)k$. Par suite,

$$\begin{aligned}r(x)=r(x_1)+r(x_2)&=(\cos\theta)x_1+(\sin\theta)k\wedge x_1+x_2=(\cos\theta)(x-(x.k)k)+(\sin\theta)k\wedge x+(x.k)k\\&=(\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)=(\cos\theta)x+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

**Application.** Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur $x$, on a :

$$r(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x.k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

puis, $r(e_1)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$
$r(e_2)=\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$
$r(e_3)=\frac{1}{2}e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3)$.

$$\boxed{\text{La matrice cherchée est }\frac{1}{4}\left(\begin{array}{ccc}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{array}\right).}$$

---

**Correction de l'exercice 18 ▲**

L'application $(f,g)\mapsto\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned}I_nI_{n+2}&=\int_0^1 f^n(t)\,dt\int_0^1 f^{n+2}(t)\,dt=\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2dt\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2dt\\&\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\,dt\right)^2=\left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\,dt\right)^2=I_{n+1}^2\end{aligned}$$

Maintenant, comme $f$ est continue et strictement positive sur $[0,1]$, $I_n$ est strictement positif pour tout naturel $n$. On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite }\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est définie et croissante.}}$$

---

**Correction de l'exercice 19 ▲**

1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}P|P=0&\Rightarrow\int_0^1 P^2(t)\,dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,1],\ P^2(t)=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow P=0\text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de $E$, nous allons vérifier que

   (a) $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p)=\text{Vect}(1,X,...,X^p)$,

   (b) la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est orthonormale,

   (c) $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $L_p|X^p>0$.

   Pour a), on note que $L_p$ est un polynôme de degré $p$ (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0,L_1,...,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p)=\text{Vect}(1,X,...,X^p)$. Soit $p\in[\![0,n]\!]$. Soit $P$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $p$. Si $p\geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}L_p|P&=\int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p)}P(t)\,dt=\left[((t^2-1)^p)^{(p-1)}P(t)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt\\&=-\int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt.\end{aligned}$$

   En effet, 1 et $-1$ sont racines d'ordre $p$ de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0\leqslant k\leqslant p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0\leqslant k\leqslant p-1$. En réitérant, on obtient pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, $L_p|P=(-1)^k\int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p-k)}P^{(k)}(t)\,dt$ et pour $k=p$, on obtient enfin $L_p|P=(-1)^p\int_{-1}^{1}(t^2-1)^pP^{(p)}(t)\,dt$, cette formule restant vraie pour $p=0$. Soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $0\leqslant q<p\leqslant n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q=(-1)^p\int_{-1}^{1}(t^2-1)^pL_q^{(p)}(t)\,dt=0$ car $q=\deg(L_q)<q$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, $L_p|X^p=(-1)^p\int_{-1}^{1}(t^2-1)^p(t^p)^{(p)}\,dt=p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt>0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille }\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}\text{ est l'orthonormalisée de la base canonique de }\mathbb{R}_n[X].}$$

   Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p\in(L_0,...,L_{p-1})^\perp=(\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned}||L_p||^2&=L_p|L_p=L_p|\text{dom}(L_p)X^p\ (\text{car }L_p\in(\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp)\\&=\frac{(2p)!}{p!}L_p|X^p=\frac{(2p)!}{p!}p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt=2(2p)!\int_0^1(1-t^2)^p\,dt\\&=2(2p)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2u)^p(-\sin u)\,du=2(2p)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}u\,du\\&=2(2p)!W_{2p+1}\ (\text{intégrales de WALLIS})\\&=2(2p)!\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\ (\text{à revoir})\\&=\frac{2}{2p+1}2^{2p}(p!)^2.\end{aligned}$$

   Donc, $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\|L_p\|=\sqrt{\frac{2}{2p+1}}2^pp!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}}\frac{1}{2^pp!}((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).

---