



Equations différentielles linéaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Résoudre sur l'intervalle I de \mathbb{R} proposé les équations différentielles suivantes :

- 1) $x \ln xy' + y = x$, $I =]1, +\infty[$ 2) $x(xy' + y - x) = 1$, $I =]-\infty, 0[$
 3) $2xy' + y = x^4$, $I =]-\infty, 0[$ 4) $y' + 2y = x^2 - 3x$, $I = \mathbb{R}$
 5) $y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$, $I = \mathbb{R}$ 6) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$, $I =]0, \pi[$

[Correction ▼](#)

[005476]

Exercice 2 ***I

Résoudre l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-1, +\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

[Correction ▼](#)

[005477]

Exercice 3 ***

Résoudre sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x - 1)y = x^3$.

[Correction ▼](#)

[005478]

Exercice 4 **

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles :

- 1) $y'' - 2y' + 2y = x \cos x \operatorname{ch} x$ 2) $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ 3) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
 4) $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = e^x \sin x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

[Correction ▼](#)

[005479]

Exercice 5 **

On considère l'équation différentielle $(E) : ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0, +\infty[$.

- Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
- Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
- Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

[Correction ▼](#)

[005480]

Exercice 6 **

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur \mathbb{R} et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur \mathbb{R} , de période T .

[Correction ▼](#)

[005481]

Correction de l'exercice 1 ▲

Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Soit f une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, x \ln x f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I, \ln x f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (\ln x \cdot f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x} \end{aligned}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Soit f une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I, (xf)'(x) = x + \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x) + \lambda}{x}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x) + \lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I =]-\infty, 0[$ et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Soit f une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{1}{2x} f(x) = \frac{x^3}{2} \\ \forall x \in I, e^{\ln|x|/2} f'(x) + \frac{1}{2x} e^{\ln|x|/2} f(x) &= \frac{x^3}{2} e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x \in I, (\sqrt{-x} f)'(x) = -\frac{1}{2} (-x)^{7/2} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, \sqrt{-x} f(x) = \frac{1}{9} (-x)^{9/2} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{1}{9} x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ sont continues sur \mathbb{R} et on sait que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{2x} f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \end{aligned}$$

Recherche d'une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$.

1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x)e^{2x} dx &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x - 3)e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x - 3)e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 - 8x + 3)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)e^{2x} + C \end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons les primitives de $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

$$((ax^2 + bx + c)e^{2x})' = (2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b))e^{2x} = (2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2 + bx + c)e^{2x})' = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -3 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Résolution de (E).

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{2x}f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x}f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)e^{2x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

5. Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur \mathbb{R} et on sait que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+2e^x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x f'(x) + e^x f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^x f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+2e^x) + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2} \ln(1+2e^x) + \lambda\right) e^{-x} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \left(\frac{1}{2} \ln(1+2e^x) + \lambda\right) e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

6. Les fonctions $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I =]0, \pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Mais $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur I et $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0, \pi[$.

Les solutions de (E) sur $]0, \pi[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sin x + \cos x, \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

Soit I l'un des deux intervalles $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) .

Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x^3 + \lambda}{3(1-x^2)}, \end{aligned}$$

(en renommant λ la constante 3λ).

Si $I =]-1, +\infty[$.

Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\frac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $] -1, 1[$ et solution de (E) sur $] -1, 1[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et solution de (E) sur $]1, +\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x = 1$. Donc, f est solution de (E) sur $] -1, +\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.

Pour $-1 < x < 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} + \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2x^3 + 2\lambda_1 + 3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1 + \lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1 \neq -1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si $\lambda_2 \neq -1$, f n'est pas dérivable à droite en 1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Dans ce cas, pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\}$,

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{3(1-x^2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)} = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x = 1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $] -1, +\infty[$, nécessairement pour $x > -1$, $f(x) = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $] -1, +\infty[$.

Sur $] -1, +\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x \mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.

Si $I = \mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur \mathbb{R} . La restriction de f à $] -1, +\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur \mathbb{R} et (E) n'a pas de solution sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 3 ▲

Résolution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + (1 - \frac{1}{x})f(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, e^{x-\ln x} f'(x) + (1 - \frac{1}{x})e^{x-\ln x} f(x) = e^{x-\ln x} x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, (\frac{e^x}{x} f)'(x) = xe^x = ((x-1)e^x)' \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = xe^{-x}((x-1)e^x + \lambda) = x^2 - x + \lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résolution de (E) sur $] -\infty, 0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $] -\infty, 0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }] -\infty, 0[&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, -xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in] -\infty, 0[, f'(x) + (-1 + \frac{1}{x})f(x) = -x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in] -\infty, 0[, e^{-x+\ln|x|} f'(x) + (-1 + \frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|} f(x) = -e^{-x+\ln|x|} x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in] -\infty, 0[, (-xe^{-x}y)' = x^3 e^{-x} (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto -x^3 e^{-x}$ de la forme $(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$.

$$((ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x})' = -(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c)e^{-x} = (-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c-d)e^{-x},$$

et

$$((ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x})' = x^3 e^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ 3a - b = 0 \\ 2b - c = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 6 = d \end{cases}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, xe^{-x} f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{\lambda e^x + 6}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{\lambda e^x + 6}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que l'équation admet une et une seule solution sur \mathbb{R} en « recollant » les expressions précédentes, mais en ce début d'année, on manque encore d'outils.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + 2y = 0$ est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les racines sont $1 - i$ et $1 + i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{x}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$.

$1 + i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax^2 + bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned} f'' - 2f' + 2f &= (((1+i)^2(ax^2 + bx) + 2(1+i)(2ax + b) + 2a) \\ &\quad - 2((1+i)(ax^2 + bx) + (2ax + b)) + 2(ax^2 + bx))e^{(1+i)x} \\ &= (2(1+i)(2ax + b) + 2a - 2((2ax + b)))e^{(1+i)x} = (2i(2ax + b) + 2a)e^{(1+i)x} \\ &= (4iax + 2a + 2ib)e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

puis,

$$f'' - 2f' + 2f = xe^{(1+i)x} \Leftrightarrow 4ia = 1 \text{ et } 2ib + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{4} \text{ et } b = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(ix^2 + x)e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$.

$-1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax + b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned} f'' - 2f' + 2f &= (((-1+i)^2(ax + b) + 2(-1+i)a) - 2((-1+i)(ax + b) + a) + 2(ax + b))e^{(-1+i)x} \\ &= ((ax + b)(-2i - 2(-1+i) + 2) + 2(-1+i)a - 2a)e^{(-1+i)x} \\ &= (4(1-i)(ax + b) - 2(2-i)a)e^{(-1+i)x} = (4(1-i)ax - 2(2-i)a + 4(1-i)b)e^{(-1+i)x} \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} f'' - 2f' + 2f = xe^{(-1+i)x} &\Leftrightarrow 4(1-i)a = 1 \text{ et } 4(1-i)b - 2(2-i)a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1+i}{8} \text{ et } b = \frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)} = \frac{(3+i)(1+i)}{32} = \frac{1+2i}{16}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1-i)x + 1 - 2i)e^{(-1-i)x}$.

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = x \cos x \operatorname{ch} x$ est donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(2\operatorname{Re}(\frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{(1+i)x} + \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x})) \\ &= \frac{1}{32}\operatorname{Re}(4(-ix^2 + x)(\cos x + i \sin x)e^x + (2x + 1 + 2(x+1)i)(\cos x + i \sin x)e^{-x}) \\ &= \frac{1}{32}(4(x \cos x + x^2 \sin x)e^x + ((2x + 1) \cos x - 2(x + 1) \sin x)e^{-x}) \end{aligned}$$

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{1}{8}(x \cos x + x^2 \sin x) + \lambda \cos x + \mu \sin x)e^x + ((2x + 1) \cos x - 2(x + 1) \sin x)e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $r^2 + 6r + 9 = 0$ qui admet la racine double $r = -3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$f'' + 6f' + 9f = ((4(ax^2 + bx + c) + 4(2ax + b) + 2a) + 6(2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b)) + 9(ax^2 + bx + c))e^{2x} \\ = (25(ax^2 + bx + c) + 10(2ax + b) + 2a)e^{2x} = (25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c)e^{2x}$$

puis,

$$f'' + 6f' + 9f = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow 25a = 1 \text{ et } 20a + 25b = 0 \text{ et } 2a + 10b + 25c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{25} \text{ et } b = -\frac{4}{125} \text{ et } c = \frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x}$.

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{-3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet la racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$.

1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ax^2 e^x$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$f'' - 2f' + f = ((ax^2 + 2(2ax) + 2a) - 2(ax^2 + (2ax)) + ax^2)e^{2x} = 2ae^x$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^x \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^x$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{-x}$.

$$f'' - 2f' + f = (a + 2a + a)e^{-x} = 4ae^{-x}$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^{-x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{x^2}{4} + \lambda x + \mu)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = 0$ est $r^2 - 2kr + 1 + k^2 = 0$ dont le discriminant réduit vaut $-1 = i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k+i$ et $k-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\text{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.

Si $k \neq 1$, $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{(1+i)x}$. Or,

$$f'' - 2kf' + (1+k^2)f = a((1+i)^2 - 2k(1+i) + 1+k^2)e^{(1+i)x} = ((k-1)^2 - 2(k-1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f'' - 2kf' + (1+k^2)f = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k-1} \frac{1}{k-1-2i} = \frac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)} e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ est

$$\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)} \operatorname{Im}((k-1-2i)(\cos x + i \sin x)e^x) = \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)} (-2 \cos x + (k-1) \sin x)e^x.$$

Si $k \neq 1$, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)} (-2 \cos x + (k-1) \sin x)e^x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{kx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

- Supposons y deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc, puisque pour tout réel t , $z(t) = y(e^t)$, la fonction z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions deux fois dérivables. Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction $t \mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Donc, puisque pour tout réel strictement positif x , $y(x) = z(\ln x)$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Pour t réel, posons donc $x = e^t$ puis, $z(t) = y(x) = y(e^t)$. Alors, $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ puis $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = xy'(x) + x^2 y''(x)$. Donc, $xy'(x) = z'(t)$ et $x^2 y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$. Par suite,

$$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = a(z''(t) - z'(t)) + bz'(t) + cz(t) = az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t).$$

Donc,

$$\forall x > 0, ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = 0.$$

- On applique le 2) avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. L'équation à résoudre sur \mathbb{R} est alors $z'' - 2z' + z = 0$. Les solutions de cette équation sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x \ln x + \mu x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 6 ▲

On sait que les solutions sur \mathbb{R} de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x+T) = \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^{x+T} e^{at} f(t) dt$. Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{x+T} e^{at} f(t) dt &= \int_0^x e^{at} f(t) dt + \int_x^{x+T} e^{at} f(t) dt = \int_0^x e^{at} f(t) dt + \int_0^T e^{a(u+T)} f(u+T) du \\ &= \int_0^x e^{at} f(t) dt + e^{aT} \int_0^T e^{au} f(u) du. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
g(x+T) &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^x e^{at} f(t) dt + e^{-ax} \int_0^T e^{au} f(u) du \\
&= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t) dt + g(x) - \lambda e^{-ax}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
g \text{ est } T\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t) dt - \lambda e^{-ax} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(1 - e^{-aT}) = e^{-aT} \int_0^T e^{at} f(t) dt \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t) dt
\end{aligned}$$

($e^{-aT} \neq 1$ car $a \neq 0$ et $T \neq 0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t) dt e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt.$$
