Calculs de primitives et d'intégrales

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{x^3+1}$ 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$ 3) $\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$ 4) $\frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$ 5) $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$
6) $\frac{x^2+x}{x^6+1}$ 7) $\frac{1}{x^4+1}$ 8) $\frac{1}{(x^4+1)^2}$ 9) $\frac{1}{x^8+x^4+1}$ 10) $\frac{x}{(x^4+1)^3}$
11) $\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$

Correction ▼ [005466]

Exercice 2

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{\cos x}$ et $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 2) $\frac{1}{\sin x}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ 3) $\frac{1}{\tan x}$ et $\frac{1}{\operatorname{th} x}$ 4) $\frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$ 5) $\frac{1}{2+\sin^2 x}$
6) $\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ 7) $\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}$ 8) $\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ 9) $\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$ 10) $\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}$
11) $\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}$ 12) $\frac{\sin x}{\cos(3x)}$ 13) $\frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}$ 14) $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$ 15) $\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$
16) $\frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$ 17) $\frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$ 18) $\frac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

Correction ▼ [005467]

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ et $\sqrt{x^2+2x+5}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 3) $\frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 5) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
6) $\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$ 7) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$ 8) $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$ 9) $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
10) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

Correction ▼ [005468]

Exercice 4

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{x\ln x}$ 2) $\arcsin x$ 3) $\arctan x$ 4) $\arccos x$ 5) $\operatorname{argsh} x$
6) $\operatorname{argch} x$ 7) $\operatorname{argth} x$ 8) $\ln(1+x^2)$ 9) $e^{\arccos x}$ 10) $\cos x\ln(1+\cos x)$
11) $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$ 12) $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ 13) $(\frac{x}{e})^x\ln x$ 14) $x^n\ln x$ $(n\in\mathbb{N})$ 15) $e^{ax}\cos(\alpha x)$ $((a,\alpha)\in(\mathbb{R}^*)^2)$
16) $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$ 17) $\frac{\sqrt{x^n+1}}{x}$ 18) $x^2e^x\sin x$

Correction ▼ [005469]

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

1) $\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}$ $(0<a)$
2) $\int_0^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\,dx$ et $\int_0^{\pi} 2\cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $\int_0^{\pi} 2\sin(px)\sin(qx)\,dx$
3) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$
4) $\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\,dx$
5) $\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$
6) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx$
7) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$
8) $\int_1^x (\ln t)^n\,dt$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

Correction ▼ [005470]

Exercice 6

Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que les primitives de $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c)^2(x-d)^2}$ soient rationnelles (a, b, c et d réels donnés).

Correction ▼ [005471]

Exercice 7

Etude de $f(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [005472]

Exercice 8

Etude de $f(x)=\int_0^1 \text{Max}(x,t)\,dt$.

Correction ▼ [005473]

Exercice 9 Intégrales de WALLIS

Pour n entier naturel, on pose $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

1. Calculer W_0 et W_1. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} et en déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.
2. Etudier les variations de la suite (W_n) et en déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. En déduire $\lim_{n\to+\infty}W_n$, puis un équivalent simple de W_n. En écrivant $\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\pi}2$, retrouver directement $\lim_{n\to+\infty}W_n$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{1.3....(2n-1)}{2.4....(2n)}\right)^2=\frac{1}{\pi}$. (Formule de WALLIS)

[005474]

Exercice 10

Pour n entier naturel, on pose $In=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.
2. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Correction ▼ [005475]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+j}+\frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

où $a=\frac{1}{3(-1)^2}=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{3(-j)^2}=\frac{j}{3}$. Par suite,

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2})=\frac{1}{3}(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1})=\frac{1}{3}(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1})$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}).$$

Mais alors,

$$\int\frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}(\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, $\int\frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$.

3. $X^3-X^2-X+1=X^2(X-1)-(X-1)=(X^2-1)(X-1)=(X-1)^2(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f=\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ est de la forme $aX^2+bX+c+\frac{d_1}{X-1}+\frac{d_2}{(X-1)^2}+\frac{e}{X+1}$.
Détermination de a, b et c. La division euclidienne de X^5 par X^3-X^2-X+1 s'écrit $X^5=(X^2+X+2)(X^3-X^2-X+1)+2X^2+X-2$. On a donc $a=1$, $b=1$ et $c=2$.
$e=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\frac{(-1)^5}{(-1-1)^2}=-\frac{1}{4}$. Puis, $d_2=\lim_{x\to1}(x-1)^2f(x)=\frac{1^5}{1+1}=\frac{1}{2}$. Enfin, $x=0$ fournit $0=c-d_1+d_2+e$ et donc, $d_1=-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$. Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}=X^2+X+2-\frac{9}{4}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a sur I

$$\int\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.$$

4. Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^5}\,dx=\frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^5}\,dx$$
$$=\frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{((\frac{\sqrt{3}}{2}u)^2+\frac{3}{4})^5}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du\ (\text{en posant } x+\frac{1}{2}=\frac{u\sqrt{3}}{2})$$
$$=\frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int\frac{1}{(u^2+1)^5}\,du.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons alors $I_n=\int\frac{du}{(u^2+1)^n}$. Une intégration par parties fournit

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n\right)$. Mais alors,

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8}I_4 = \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6}I_3\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4}I_2\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}I_1\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan u+C.
\end{aligned}
$$

Maintenant,

$$
u^2+1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1 = \frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}(x^2+x+1).
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int\frac{1}{(u^2+1)^5}\,du &= \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\left(\frac{1}{8}\frac{3^4}{4^4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{3^3}{4^3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{3^2}{4^2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^2}\right.\\
&\left.+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{3}{4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right).\\
&= \frac{1}{8}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{36}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}+\frac{35}{108}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{35}{54}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\\
&+\frac{70\sqrt{3}}{81}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,
\end{aligned}
$$

(il reste encore à réduire au même dénominateur).

5. On pose $u=x^2$ et donc $du=2xdx$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u(u+1)^2} &= \frac{1}{2}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2})\,du\\
&= \frac{1}{2}(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1})+C\\
&= \frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})+C.
\end{aligned}
$$

6. $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx+\int\frac{x}{x^6+1}\,dx.$
Ensuite, en posant $u=x^3$ et donc $du=3x^2\,dx$,

$$
\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\arctan u+C = \frac{1}{3}\arctan(x^3)+C,
$$

et en posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^3+1}\,du &= \frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2-u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C \text{ (voir 1))}\\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C.
$$

7. $\frac{1}{X^4+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_k}{X-z_k}$ où $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. De plus, $\lambda_k = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$. Ainsi,

$$\frac{1}{X^4+1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\pi/4}}{X-e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{X-e^{-i\pi/4}} + \frac{-e^{i\pi/4}}{X+e^{i\pi/4}} + \frac{-e^{-i\pi/4}}{X+e^{-i\pi/4}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right).$$

Mais,

$$\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{1}{(X-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

et donc,

$$\int \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C,$$

et de même,

$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1))+C.$$

8. Une intégration par parties fournit

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{x}{x^4+1} + \int \frac{4x^4}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{1}{x^4+1}\,dx - 4\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx$$

Et donc,

$$\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}(\frac{x}{x^4+1} + 3\int \frac{1}{x^4+1}\,dx) = \ldots$$

9. Posons $R = \frac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$X^8+X^4+1 = \frac{X^{12}-1}{X^4-1} = \frac{\prod_{k=0}^{11}(X-e^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}$$
$$= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).$$

R est réelle et paire. Donc,

$$R = \frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\overline{a}}{X+j^2} + \frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} - \frac{b}{X+e^{i\pi/6}} - \frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}.$$

$a = \frac{1}{8j^7+4j^3} = \frac{1}{4(2j+1)} = \frac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)} = \frac{-1-2j}{12}$ et donc,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}=\frac{1}{12}(\frac{-1-2j}{X-j}+\frac{-1-2j^2}{X-j^2})=\frac{1}{4}\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{4}\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

et par parité,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}).$$

Ensuite, $b=\frac{1}{8e^{7i\pi/6}+4e^{3i\pi/6}}=\frac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)}=\frac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)}=\frac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12}=\frac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12}=\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$, et donc,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}=\frac{1}{12}(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}})=\frac{1}{12}\frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Par parité,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalement,

$$\int\frac{1}{x^8+x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C.$$

10. En posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$, on obtient $\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)^3}$.
Pour $n\geqslant 1$, posons $I_n=\int\frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$. Une intégration par parties fournit :

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+\int\frac{u.(-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du$$
$$=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $\forall n\geqslant 1,\ I_{n+1}=\frac{1}{2n}(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n)$.
On en déduit que

$$I_3=\frac{1}{4}(\frac{u}{(u^2+1)^2}+3I_2)=\frac{u}{4(u^2+1)^2}+\frac{3}{8(u^2+1)}+\frac{3}{8}\arctan u+C,$$

et finalement que

$$\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{16}(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2}+\frac{3}{x^4+1}+3\arctan(x^2))+C.$$

11.

$$(X+1)^7-X^7-1=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

Par suite,

$$\frac{7}{(X+1)^7-X^7-1}=\frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c_1}{X-j}+\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}.$$

$a=\lim_{x\to 0}xR(x)=1$, $b=\lim_{x\to -1}(x+1)R(x)=-1$, et

$c_2=\lim_{x\to j}(x-j)^2R(x)=\frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2}=-\frac{1}{j^2(1-2j+j^2)}=\frac{1}{3}$. Puis,

$$\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}=\frac{1}{3}(\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2},$$

et

$$\begin{aligned}R-(\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2})&=\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2}-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}\\&=\frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.\end{aligned}$$

Puis, $c_2=\frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)}=-\frac{5}{j-j^2}=\frac{5(j-j^2)}{(j-j^2)(j^2-j)}=\frac{5(j-j^2)}{3}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}&=\frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{3}(\frac{5(j-j^2)}{X-j}+\frac{5(j^2-j)}{X-j^2}+\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}))\\&=\frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{X^2+X+1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}))\\&=\frac{1}{7}(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2})).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx&=\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}(\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2})\right)+C\\&=\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ et donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}\,dx&=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int 2\frac{1}{1-t^2}\,dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C\\&=\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.\end{aligned}$$

ou bien

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2x}\,dx=\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C...$$

ou bien, en posant $u=x+\frac{\pi}{2}$, (voir 2))

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{1}{\cos(u-\frac{\pi}{2})}\,du=\int\frac{1}{\sin u}\,du=\ln|\tan\frac{u}{2}|+C=\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.$$

Ensuite, en posant $t=e^x$ et donc $dx=\frac{dt}{t}$,

$$\int\frac{1}{\operatorname{ch}x}\,dx=\int\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}=2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=2\arctan(e^x)+C,$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x+1}\,dx = \arctan(\operatorname{sh} x)+C.$$

2. En posant $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

3. $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+C$ et $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln|\operatorname{sh} x|+C$.

4. $\int \frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-\sin x|+C$.

5. $\frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2+3\tan^2 x}d(\tan x)$, et en posant $u=\tan x$,

$$\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2+3u^2}\,du = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}u)+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x)+C.$$

6. Posons $I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et $J=\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$. Alors, $I+J=\int dx = x+C$ et $I-J=\int \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \ln|\cos x+\sin x|+C$. En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

ou bien, en posant $u=x-\frac{\pi}{4}$,

$$I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,dx = \int \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos u}\,du = \frac{1}{2}\int(1-\frac{\sin u}{\cos u})\,du = \frac{1}{2}(u+\ln|\cos u|)+C$$
$$= \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}+\ln|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)|)+C = \frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

7.

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx = \frac{4\cos^3 x-3\cos x}{4\sin x-4\sin^3 x} = \frac{1}{4}\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x(1-\sin^2 x)} = \frac{1}{4}(\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{3}{\sin x\cos x}) = \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx = \ln|\sin x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C.$$

8. $\cos^4 x+\sin^4 x = (\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx &= \int \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\,dx = \int \frac{1}{2-\sin^2 u}\,du \text{ (en posant } u=2x)\\ &= \int \frac{1}{1+\cos^2 u}\,du = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\frac{dv}{1+v^2} \text{ (en posant } v=\tan u)\\ &= \int \frac{dv}{v^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\,dx &= \frac{2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x+1}\cos x\,dx = \frac{2\sin^2 x}{2-2\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\cos x\,dx\\ &= \frac{u^2}{u^4-u^2+1}\,du \text{ (en posant } u=\sin x).\end{aligned}$$

Maintenant, $u^4-u^2+1=\frac{u^6+1}{u^2+1}=(u-e^{i\pi/6})(u-e^{-i\pi/6})(u+e^{i\pi/6})(u+e^{-i\pi/6})$, et donc,

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1}=\frac{a}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{a}}{u-e^{-i\pi/6}}-\frac{a}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{a}}{u+e^{-i\pi/6}},$$

ou $a=\frac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})}=\frac{(e^{i\pi/6})^2}{i.2e^{i\pi/6}.\sqrt{3}}=\frac{-ie^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}}$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{u^4-u^2+1}&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{-ie^{i\pi/6}}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{ie^{-i\pi/6}}{u-e^{-i\pi/6}}+\frac{ie^{i\pi/6}}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{ie^{-i\pi/6}}{u+e^{-i\pi/6}})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1})+\frac{1}{4}(\frac{1}{(u+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(u-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2})\end{aligned}$$

et donc,

$$\int\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4x+\cos^4x+1}\,dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin^2x-\sqrt{3}\sin x+1}{\sin^2x+\sqrt{3}\sin x+1}\right|+\frac{1}{2}(\arctan(2\sin x-\sqrt{3})+\arctan(2\sin x+\sqrt{3})+C.$$

10. En posant $u=\sin x$, on obtient

$$\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx=\frac{\sin x}{1+3\sin x-4\sin^3x}\frac{1}{\cos^2x}\cos x\,dx=\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}\,du$$

Or, $1+3u-4u^3=(u+1)(-4u^2-4u-1)=-(u-1)(2u+1)^2$ et donc, $(1+3u-4u^3)(1-u^2)=(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2$ et donc,

$$\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}=\frac{a}{u+1}+\frac{b_1}{u-1}+\frac{b_2}{(u-1)^2}+\frac{c_1}{2u+1}+\frac{c_2}{(2u+1)^2}.$$

$a=\lim_{u\to-1}(u+1)f(u)=\frac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2}=-\frac{1}{4}$, $b_2=\frac{1}{(1+1)(2+1)^2}=\frac{1}{18}$
et $c_2=\frac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2}=-\frac{4}{9}$.
Ensuite, $u=0$ fournit $0=a-b_1+b_2+c_1+c_2$ ou encore $c_1-b_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{4}{9}=\frac{23}{36}$. D'autre part, en multipliant par u, puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0=a+b_1+c_1$ et donc $b_1+c_1=\frac{1}{4}$ et donc, $c_1=\frac{4}{9}$ et $b_1=-\frac{7}{36}$. Finalement,

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2}=-\frac{1}{4(u+1)}-\frac{7}{36(u-1)}+\frac{1}{18(u-1)^2}+\frac{4}{9(2u+1)}-\frac{4}{9(2u+1)^2}.$$

Finalement,

$$\int\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx=-\frac{1}{4}\ln(\sin x+1)-\frac{7}{36}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{18(\sin x-1)}+\frac{2}{9}\ln|2\sin x+1|+\frac{2}{9}\frac{1}{2\sin x+1}+C$$

11. (voir 6))

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}\,dx&=\int\frac{\frac{1}{2}((\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x))+((\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{1}{2}\int dx\\&=\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x|+\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

12.

$$\int \frac{\sin x}{\cos(3x)}\,dx = \int \frac{\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{1}{3u-4u^3}\,du \text{ (en posant } u=\cos x)$$
$$= \int \left(\frac{1}{3u} - \frac{1}{3(2u-\sqrt{3})} - \frac{1}{3(2u+\sqrt{3})}\right) du$$
$$= \frac{1}{3}(\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x - \sqrt{3}| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x + \sqrt{3}|) + C.$$

13. Dans tous les cas, on pose $t = \tan x$ et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\alpha + \beta\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\alpha+\beta t^2}.$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, $\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\tan x + C$.
Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta > 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x) + C.$$

Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta < 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt = \frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\tan x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right| + C.$$

14.

$$\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}\,dx = \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{1+\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x\,dx$$
$$= \int \frac{u^2+1}{u+1}\,du \text{ (en posant } u = \operatorname{sh} x)$$
$$= \int (u - 1 + \frac{2}{u+1})\,du = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \operatorname{sh} x + 2\ln|1+\operatorname{sh} x| + C.$$

15. On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}\,dx = \int \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} x-1)(\operatorname{ch} x+1)}}{\sqrt{\operatorname{ch} x+1}}\,dx = \operatorname{sgn}(x)\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x+1}}\,dx$$
$$= 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\operatorname{ch} x+1} + C.$$

16.

$$\int \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x+1}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} x(\operatorname{ch} x+1)}\operatorname{sh} x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du \text{ (en posant } u = \operatorname{ch} x)$$
$$= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\,du = \ln\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x+1} + C.$$

17. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch}^2 x-1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(u^2-1)^3}\,du$ (en posant $u = \operatorname{ch} x$).

18.

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{1+\operatorname{ch} x}{1-\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx - \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$$
$$= \operatorname{coth} x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx = \text{argsh}\,\frac{x+1}{2}+C$$
$$= \ln(\frac{x+1}{2}+\sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1})+C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$$

Puis,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}-\int (x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}-\int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}-\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx+4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx,$$

et donc,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$$

(On peut aussi poser $x+1 = 2\,\text{sh}\,u$).

2. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1)+C.$

3. On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1}2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}(v+\int \frac{1}{v^2-1}\,dv) = \frac{1}{3}(v+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|)+C$$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^6}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|)+C$$

4.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx)$$
$$= \frac{1}{2}(\int \frac{u}{u^2-1}2u\,du+\int \frac{v}{1-v^2}2v\,dv) \text{ (en posant } u=\sqrt{1+x} \text{ et } v=\sqrt{1-x})$$
$$= \int (1+\frac{1}{u^2-1})\,du+\int (-1+\frac{1}{1-v^2}\,dv$$
$$= u-v+\frac{1}{2}(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|)+C$$
$$= \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right|+\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|)+C.$$

5. On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx = \frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2}\,du$. Sur $]1,+\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\,du\\ &= 2\frac{u}{u^2-1}-2\int\frac{u^2-1}{}du\\ &= \frac{2u}{u^2-1}+2\ln\left||\frac{1+u}{1-u}\right|+C\\ &= 2\sqrt{x^2-1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right|+C\end{aligned}$$

6. On note ε le signe de x.
$\sqrt{x^4-x^2+1}=\varepsilon x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\varepsilon x\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}$ puis, $\frac{x^2+1}{x}.\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})'$. On pose donc $u=x-\frac{1}{x}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx &= \varepsilon\int\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}}.\frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x}\,dx=\varepsilon\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du=\varepsilon\,\mathrm{argsh}(x-\frac{1}{x})+C\\ &= \varepsilon\ln(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x})+C.\end{aligned}$$

7. Sur $]0,1]$, on pose déjà $u=\sqrt{x}$ et donc, $x=u^2$, $dx=2u\,du$.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1-u}{u}}2u\,du=2\int\sqrt{u(1-u)}\,du=2\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(u-\frac{1}{2})^2}\,du.$$

Puis, on pose $u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin v$ et donc $du=\frac{1}{2}\cos v\,dv$. On note que $x\in]0,1]\Rightarrow u\in]0,1]\Rightarrow v=\arcsin(2u-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\cos v\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx &= 2\int\sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2 v)}\frac{1}{2}\cos v\,dv=\frac{1}{2}\int\cos^2 v\,dv=\frac{1}{4}\int(1+\cos(2v))\,dv\\ &= \frac{1}{4}(v+\frac{1}{2}\sin(2v))+C=\frac{1}{4}(v+\sin v\cos v)+C\\ &= \frac{1}{4}(\arcsin(2\sqrt{x}-1)+(2\sqrt{x}-1)\sqrt{1-(2\sqrt{x}-1)^2})+C\\ &\frac{1}{4}(\arcsin(2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x})+C\end{aligned}$$

8. On pose $x=\mathrm{sh}\,t$ puis $u=e^t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int\frac{1}{1+\mathrm{ch}\,t}\mathrm{ch}\,t\,dt=\int\frac{\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}\frac{du}{u}=\int\frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)}\,du=\int(\frac{1}{u}-\frac{2}{(u+1)^2})\,du\\ &= \ln|u|+\frac{2}{u+1}+C.\end{aligned}$$

Maintenant, $t=\mathrm{argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et donc, $u=x+\sqrt{x^2+1}$. Finalement,

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{2}{x+\sqrt{x^2+1}}+C.$$

9. On pose $u=\frac{1}{x}$ puis $v=\sqrt[3]{u^3+1}=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$ et donc $v^3=u^3+1$ puis $v^2\,dv=u^2\,du$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx&=\int\frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{u})^3+1}}{\frac{1}{u^2}}\,\frac{-du}{u^2}=-\int\frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u}\,du=-\int\frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u^3}u^2\,du\\&=-\int\frac{v}{v^3-1}v^2\,dv=\int(-1-\frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)})\,dv\\&=\int(-1-\frac{1}{3}\frac{1}{v-1}+\frac{1}{3}\frac{v+2}{v^2+v+1})\,dv\\&=-v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\int\frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dv\\&=-v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\ln(v^2+v+1)+\sqrt{3}\arctan(\frac{2v+1}{\sqrt{3}})+C...\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $\int\frac{1}{x\ln x}\,dx=\ln|\ln x|+C$.
2. $\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.
3. $\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.
4. $\int\arccos x\,dx=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.
5. $\int\operatorname{argsh}x\,dx=x\operatorname{argsh}x-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=x\operatorname{argsh}x-\sqrt{1+x^2}+C$.
6. $\int\operatorname{argch}x\,dx=x\operatorname{argch}x-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=x\operatorname{argch}x-\sqrt{x^2-1}+C$.
7. $\int\operatorname{argth}x\,dx=x\operatorname{argth}x-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx=x\operatorname{argth}x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$ (on est sur $]-1,1[$).
8. $\int\ln(1+x^2)\,dx=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.
9.
$$\begin{aligned}\int e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx&=xe^{\operatorname{Arccos}x}+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx\\&=xe^{\operatorname{Arccos}x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos}x}+\int\sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx\end{aligned}$$
et donc, $\int e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx=\frac{1}{2}(xe^{\operatorname{Arccos}x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos}x})+C$.
10.
$$\begin{aligned}\int\cos x\ln(1+\cos x)\,dx&=\sin x\ln(1+\cos x)-\int\sin x\frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx=\sin x\ln(1+\cos x)-\int\frac{\cos^2x-1}{\cos x+1}\,dx\\&=\sin x\ln(1+\cos x)-\int(\cos x-1)\,dx=\sin x\ln(1+\cos x)-\sin x+x+C.\end{aligned}$$
11. $\int\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\arctan x-2\int\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$.
Dans la dernière intégrale, on pose $u=\sqrt{x}$ et donc $x=u^2$ puis, $dx=2u\,du$. On obtient $\int\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx=\int\frac{2u^2}{u^4+1}\,du$. Mais,
$$\begin{aligned}\frac{2u^2}{u^4+1}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1})\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}u-1)+\arctan(\sqrt{2}u+1))+C,$$

et donc,

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right)-\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2x}-1)+\arctan(\sqrt{2x}+1))+C.$$

12. $\frac{x}{(x+1)^2}e^x = \frac{1}{x+1}e^x - \frac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\frac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$.
13. $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\,dx = \int e^{x\ln x - x}\,d(x\ln x - x) = e^{x\ln x-x}+C = \left(\frac{x}{e}\right)^x\,dx.$
14. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C.$
15.
$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right)+C = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x))+C$$
$$= \frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2}+C$$
16. $\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$ et donc $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$.
17. En posant $u = x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du,$$

puis en posant $v = \sqrt{u+1}$ et donc $u = v^2-1$ et $du = 2vdv$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du = \int \frac{v}{v^2-1}\,2vdv = 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv = 2v+\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right|+C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \frac{1}{n}\left(2\sqrt{x^n+1}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|\right)+C.$$

18. $\int x^2e^x\sin x\,dx = \mathrm{Im}(\int x^2e^{(1+i)x}\,dx)$. Or,

$$\int x^2e^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}-\frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}-\frac{2}{1+i}\left(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}-\int e^{(1+i)x}\,dx\right)$$
$$= x^2\frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2}+ixe^{(1+i)x}-i\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}+C$$
$$= e^x\left(\frac{1}{2}x^2(1-i)(\cos x+i\sin x)+ix(\cos x+i\sin x)-\frac{1}{2}(1+i)(\cos x+i\sin x)+C.\right.$$

Par suite,

$$\int x^2e^x\sin x\,dx = e^x\left(\frac{x^2}{2}(\cos x+\sin x)-x\sin x-\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\right)+C.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{t}$ et $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$. On obtient

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = -\int_{a}^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{1/a}^{a} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = -I,$$

et donc, $I = 0$.

2. (p et q sont des entiers naturels)
$\cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$ et donc,
Premier cas. Si $p \neq q$,

$$\int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Deuxième cas. Si $p = q \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2px))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p = q = 0$. $\int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^{\pi}\,dx = \pi$.
La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\int_0^{\pi}\sin(px)\sin(qx)\,dx = 0$ si $p \neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$ puis $\int_0^{\pi}\sin(px)\cos(qx)\,dx = 0$ pour tout choix de p et q.

3. La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\begin{cases} x^2+y^2-(a+b)x+ab=0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ est le demi-cercle de diamètre $[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}]$. Par suite, si $a \leqslant b$, $I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $I = -\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.

4. L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles. Ainsi, $I = \frac{1}{2}((1^2+3^2)+(2^2+2^2)+(3^2+1^2)+4^2) = 22$.

5. On pose $u = \frac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \int_{2}^{1/2}(1+u^2)\arctan u\frac{-du}{u^2} = \int_{1/2}^{2}(1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2}-\arctan u)\,du \\ &= \frac{\pi}{2}((2-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-2))-I). \end{aligned}$$

Par suite, $I = \frac{3\pi}{2} - I$ et donc $I = \frac{3\pi}{4}$.

6. $I = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\,dx + \int_0^1\sqrt{1+x(1-x)}\,dx = I_1 + I_2$.
Pour I_1, $1+x(x-1) = x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt = \frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt \\ &= \frac{3}{16}(\frac{1}{2}(e^{-2\ln(\sqrt{3})}-e^{2\ln(2-\sqrt{3})})-\frac{1}{2}(e^{2\ln(\sqrt{3})}-e^{-2\ln(2-\sqrt{3})})+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3}))) \\ &= \frac{3}{16}(\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2)-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2})-2\ln(2\sqrt{3}-3)) \\ &= \frac{3}{16}(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2))-2\ln(2\sqrt{3}-3)) \\ &= -\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3). \end{aligned}$$

Pour I_2, $1+x(1-x) = -x^2+x+1 = -(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt$.

$$I_2=\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\;dt=\frac{3}{4}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos^2 t\;dt=\frac{3}{8}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\;dt$$
$$=\frac{3}{8}(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\left[\sin t\cos t\right]_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{4}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{3}{4}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{10}...$$

7.
$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,-du=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,du-\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,du$$
$$=-\pi\left[\arctan(\cos u)\right]_0^{\pi}-I=\frac{\pi^2}{2}-I,$$

et donc, $I=\frac{\pi^2}{4}$.

8. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $I_n=\int_1^x \ln^n t\;dt$.

$$I_{n+1}=\left[t\ln^{n+1}t\right]_1^x-(n+1)\int_1^x t\ln^n t\frac{1}{t}\;dt=x\ln^{n+1}x-(n+1)I_n.$$

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}+\frac{I_n}{n!}=\frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et de plus, $I_1=x\ln x-x+1$.
Soit $n\geqslant 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{I_k}{k!}+\frac{I_{k+1}}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{I_k}{k!}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{I_k}{k!}=-I_1-(-1)^n\frac{I_n}{n!},$$

Par suite,

$$I_n=(-1)^n n!\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!}-x\ln x+x-1\right)=(-1)^n n!\left(1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x(\ln x)^k}{k!}\right).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Si $c\neq d$, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si il existe A et B tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}=\frac{A}{(x-c)^2}+\frac{B}{(x-d)^2}\ (*)$$

$$(*)\Leftrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}A+B=1\\-2(Ad+Bc)=-(a+b)\\Ad^2+Bc^2=ab\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}B=1-A\\A(d-c)+c=\frac{1}{2}(a+b)\\Ad^2+Bc^2=ab\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}A=\frac{a+b-2c}{2(d-c)}\\B=\frac{2d-a-b}{2(d-c)}\\Ad^2+Bc^2=ab\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{a+b-2c}{2(d-c)}d^2+\frac{2d-a-b}{2(d-c)}c^2=ab$$
$$\Leftrightarrow d^2(a+b-2c)+c^2(2d-a-b)=2ab(d-c)\Leftrightarrow(a+b)(d^2-c^2)-2cd(d-c)=2ab(d-c)$$
$$\Leftrightarrow 2cd+(a+b)(c+d)=2ab\Leftrightarrow(a+b)(c+d)=2(ab-cd).$$

Si $c=d$, il existe trois nombres A, B et C tels que $(x-a)(x-b)=A(x-c)^2+B(x-c)+C$ et donc tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4}=\frac{A}{(x-c)^2}+\frac{B}{(x-c)^3}+\frac{C}{(x-c)^4}.$$

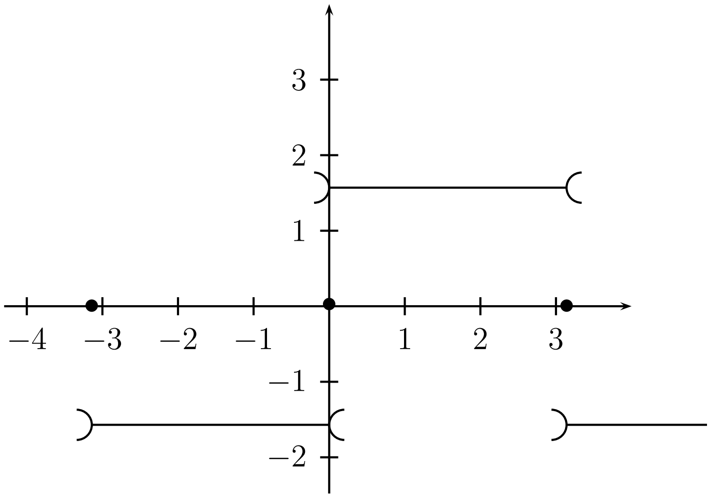
Dans ce cas, les primitives sont rationnelles. Finalement, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si $c = d$ ou ($c \neq d$ et $(a+b)(c+d) = 2(ab-cd)$).

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons D le domaine de définition de f.
Si $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire.
Si $x \in D$, $x+2\pi \in D$ et $f(x+2\pi) = f(x)$. f est donc 2π-périodique.
On étudiera donc f sur $[0,\pi]$.
Soient $x \in [0,\pi]$ et $t \in [-1,1]$. $t^2 - 2t\cos x + 1 = (t-\cos x)^2 + \sin^x \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\sin x = 0$ et $t - \cos x = 0$.
Ainsi, si $x \in]0,\pi[$, $\forall t \in]-1,1[$, $t^2 - 2t\cos x + 1 \neq 0$. On en déduit que la fraction rationnelle $t \mapsto \frac{\sin t}{1-2t\cos x+t^2}$ est continue sur $[-1,1]$, et donc que $f(x)$ existe.
Si $x = 0$, $\forall t \in [-1,1[$, $\frac{\sin x}{t^2-2t\cos x+1} = \frac{0}{(t-1)^2} = 0$. On prut prolonger cette fonction par continuité en 1 et consisérer que $f(0) = \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0$. De même, on peut considérer que $f(\pi) = 0$.
Ainsi, f est définie sur $[0,\pi]$ et donc, par parité et 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in]0,\pi[$.Calculons $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{(t-\cos x)^2+\sin^2 x}\, dt = \left[\arctan \frac{t-\cos x}{\sin x}\right]_{-1}^{1} = \arctan \frac{1-\cos x}{\sin x} + \arctan \frac{1+\cos x}{\sin x} \\
&= \arctan \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} + \arctan \frac{2\cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \arctan(\tan(x/2)) + \arctan(\frac{1}{\tan(x/2)}) \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ (car } \tan(x/2) > 0 \text{ pour } x \in]0,\pi[).
\end{aligned}$$

Ce calcul achève l'étude de f. En voici le graphe :



Correction de l'exercice 8 ▲

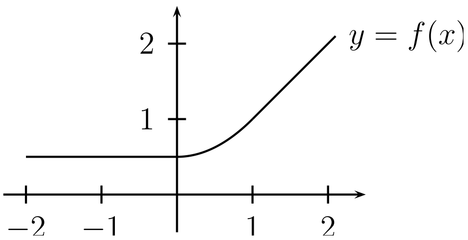
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \text{Max}(x,t) = \frac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ est continue sur $[0,1]$ en vertu de théorèmes généraux.
Par suite, $\int_0^1 \text{Max}(x,t)\, dt$ existe.
Si $x \leqslant 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $x \leqslant t$ et donc $\text{Max}(x,t) = t$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$.
Si $x \geqslant 1$, alors $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant x$ et donc $\text{Max}(x,t) = x$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 x\, dt = x$.
Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x\, dt + \int_x^1 t\, dt = x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

f est déjà continue sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $f(0^+) = \frac{1}{2} = f(0)$ et $f(1^-) = 1 = f(1)$. f est ainsi continue à droite en 0 et continue à gauche en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.

f est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $\lim_{x\to 0,\, x>0} f'(x) = \lim_{x\to 0,\, x>0} x = 0$. f est donc continue sur $[0,1[$ de classe C^1 sur $]0,1[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et en particulier, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Comme d'autre part, f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. L'étude en 1 montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 1$. Le graphe de f est le suivant :



Correction de l'exercice 10 ▲

1. $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)\, dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(I_{2k-2} + I_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k-2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_{2k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_{2k} = I_0 - (-1)^n I_{2n}.\end{aligned}$$
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.
   De même, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.
2. Soient $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$0 \leqslant I_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x\, dx + \int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x\, dx \leqslant \frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Maintenant, $0 < \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $0 \leqslant I_n < \varepsilon$.
   Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que u_n tend vers $\ln 2$ et v_n tend vers $\frac{\pi}{4}$.
