Etude de fonctions

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Etude complète des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln\left|\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\right|$.
4. $4_(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{/\ln x}$.
8. $f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x) + (x - E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-x} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}+x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\arcsin x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = e^{1/x}\sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \arccos(\frac{1}{\text{ch}\, x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) - \ln(\frac{1+x}{1-x})$ où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln|\text{sh}\, x - 1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}$.
20. $f_{20}(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\text{ch}\, x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1} - 5.3^{x-1} - x\ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$.

Correction ▼ [005443]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f_1 est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, f_1 est paire. On étudiera f_1 sur $[0,+\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).

   Etude en 0 (à gauche et à droite).

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)-x(1-x^2+x^4+o(x^4))] \\
&= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}+o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3}-\frac{4x^2}{5}+o(x^2)) \\
&= \frac{2}{3}-\frac{2x^2}{15}+o(x^2).
\end{aligned}
$$

   Par suite, f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0)=\frac{2}{3}$. Puisque f_1 admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$. C_1 admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y=\frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x)-\frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

   Etude en $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.

   Dérivée, variations.

   Pour $x>0$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^2})(\arctan x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}) \\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\arctan x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}) \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x+\frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2))} = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}
$$

   où, pour tout réel x, $g(x) = -\arctan x+\frac{3x}{3+x^2}$.

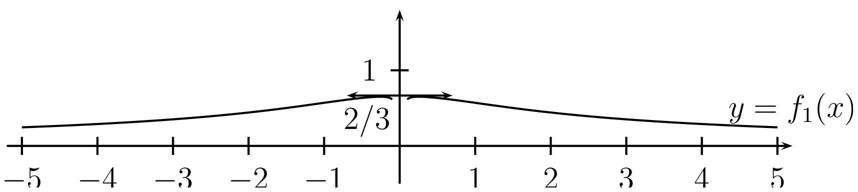
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$
g'(x) = 3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2}-\frac{1+x^2}{=}\frac{3(3-x^2)(1+x^2)-(3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.
$$

   g' est donc strictement négative sur $]0,+\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroisante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0)=0$, pour $x>0$, $g(x)<0$. Finalement, f_1' est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et f_1 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   Le tableau de variations de f_1 n'apporte rien de plus.

   Graphe



2. f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, paire et 2π-périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

   Etude en $\frac{\pi}{2}$.

   $f(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. C_2 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

   Dérivabilité et dérivée.

   f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ où ε est le signe de $\tan x$.

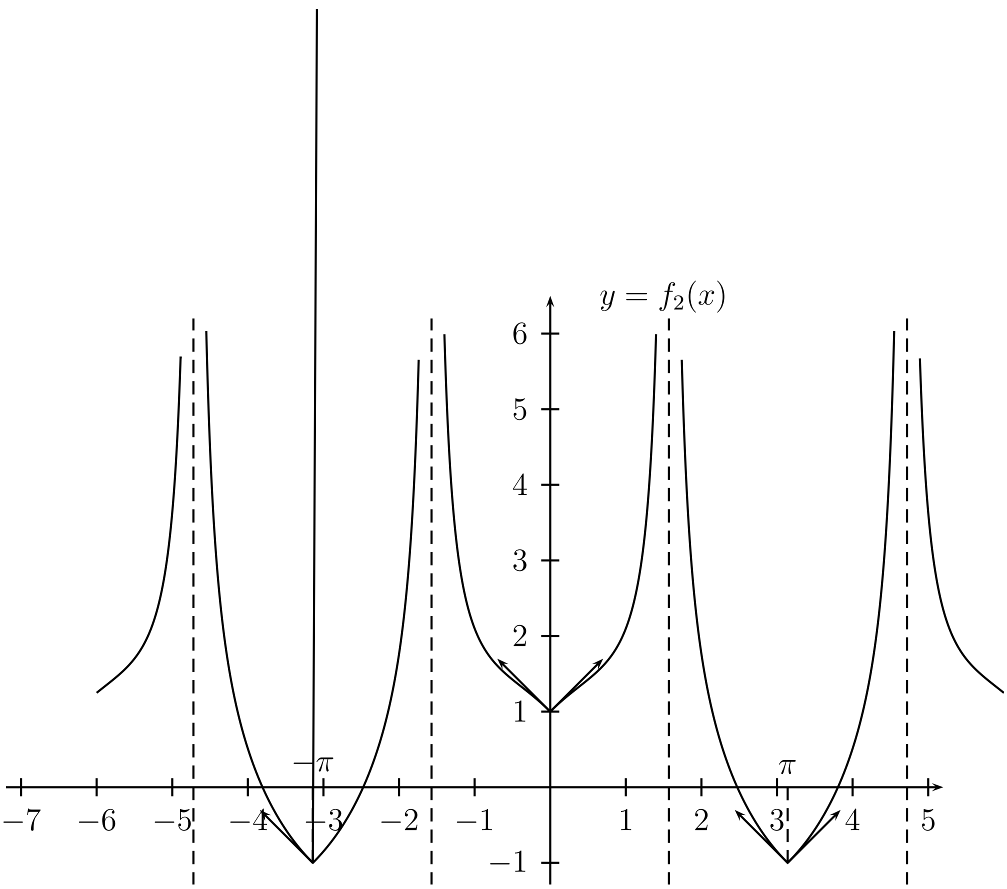
   f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0) = -1$. f_2 n'est pas dérivable en 0.

   De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi) = -1$ et $(f_2)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

   Variations.

   f_2 est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Puis, pour x élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0$. f_2' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

   Graphe.



3. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + 12x^2 + 60x + 120$. Pour tout réel x, on a $P'(x) = 3(x^2 + 8x + 20) = 3((x+4)^2 + 4) > 0$. P est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté α. De plus, $P(-5)P(-4) < 0$ et $\alpha \in]-5, -4[$.

   Enfin, P est strictement négatif sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$.

   f_3 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right| = x - \ln|P(x)| + \ln|P(-x)|.$$

Notons que f_3 est impaire.

Dérivabilité et dérivée.

f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1-\frac{P'(x)}{P(x)}-\frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x)-P'(x)P(-x)-P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&P(x)P(-x)-P'(x)P(-x)-P'(-x)P(x)\\
&\qquad = ((12x^2+120)+(x^3+60x))((12x^2+120)-(x^3+60x))\\
&\qquad -3((x^2+20)+8x)((12x^2+120)-(x^3+60x)))-3((x^2+20)-8x))((12x^2+120)+(x^3+60x))\\
&\qquad = 144(x^2+10)^2-x^2(x^2+60)^2-6((x^2+20)(12x^2+120)-(8x)(x^3+60x))\\
&\qquad = (-x^6+24x^4-720x^2+14400)-6(4x^4-120x^2+2400) = -x^6,
\end{aligned}$$

et donc $f_3'(x)=\frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.

Etude en $+\infty$.

$$f_3(x)-x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln(1+\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x}))+\ln(1-\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) = -\frac{24}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f_3(x)=+\infty$ (resp.$\lim_{x\to-\infty} f_3(x)=-\infty$, puis que C_3 admet en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la droite d'équation $y=x$ pour droite asymptote et que C_3 est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

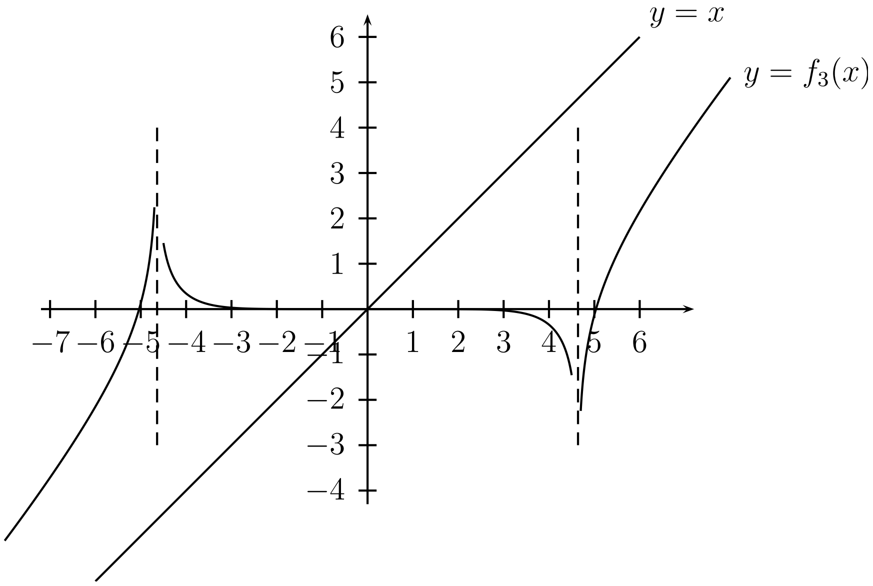
Variations.

D'une part, $f_3'(0)=0$. D'autre part, pour $x>0$, $P(x)>0$. f_3' est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0,+\infty[\setminus\{\alpha\}$. Ainsi, f_3' est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de f_3.

x	0		α		$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
f_3	0 $\searrow$		$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



4. f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x\neq 0$,

$$f_4(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x\to+\infty} f_4(x)$ si l'on connait $\lim_{x\to 0,\, x>0} f_4(x)$, obtenir les variations de f_4 sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...

On peut aussi noter que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ et donc, pour $x\neq 0$, $f_4(-x) = \frac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f_4 en -1 de l'étude en 1.

Etude en $+\infty$ et $-\infty$.

Puisque $\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on a $f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty$ et que C_4 admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y = x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1} = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2}),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + (\frac{2}{x}) + (\frac{2}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

On en déduit que

$$f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, C_4 admet la droite d'équation $y = x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x)-(x+2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, C_4 est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

Etude en 1 (et -1).

Clairement, $\lim_{x\to 1,\, x>1} f_4(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1,\, x>-1} f_4(x) = -\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to 1,\, x<1} f_4(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1,\, x<-1} f_4(x)$ 0.

On prolonge f_4 par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1) = 0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f_4.

f_4 est continue sur $]-1,1]$, de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

$$f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to 1,\, x<1}{\rightarrow} 0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f_4 est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1) = 0$.

De même, f_4 est dérivable à gauche en -1 et $f_g'(-1) = 0$. C_4 admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox).

Dérivée. Variations.

f_4 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= (\ln|f_4|)'(x) = (\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1})'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^2 - 2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0,\ f4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f_4' en 0.

f_4' est donc du signe de $P(x) = x^4-2x^3-2x^2-2x+1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2((x^2+\frac{1}{x^2}) - 2(x+\frac{1}{x}) - 2) = x^2((x+\frac{1}{x})^2 - 2(x+\frac{1}{x}) - 4) = \\ &= x^2(x+\frac{1}{x} - (1-\sqrt{5})(x+\frac{1}{x} - (1+\sqrt{5})) = (x^2-(1-\sqrt{5})x+1)(x^2-(1+\sqrt{5})x+1),\end{aligned}$$

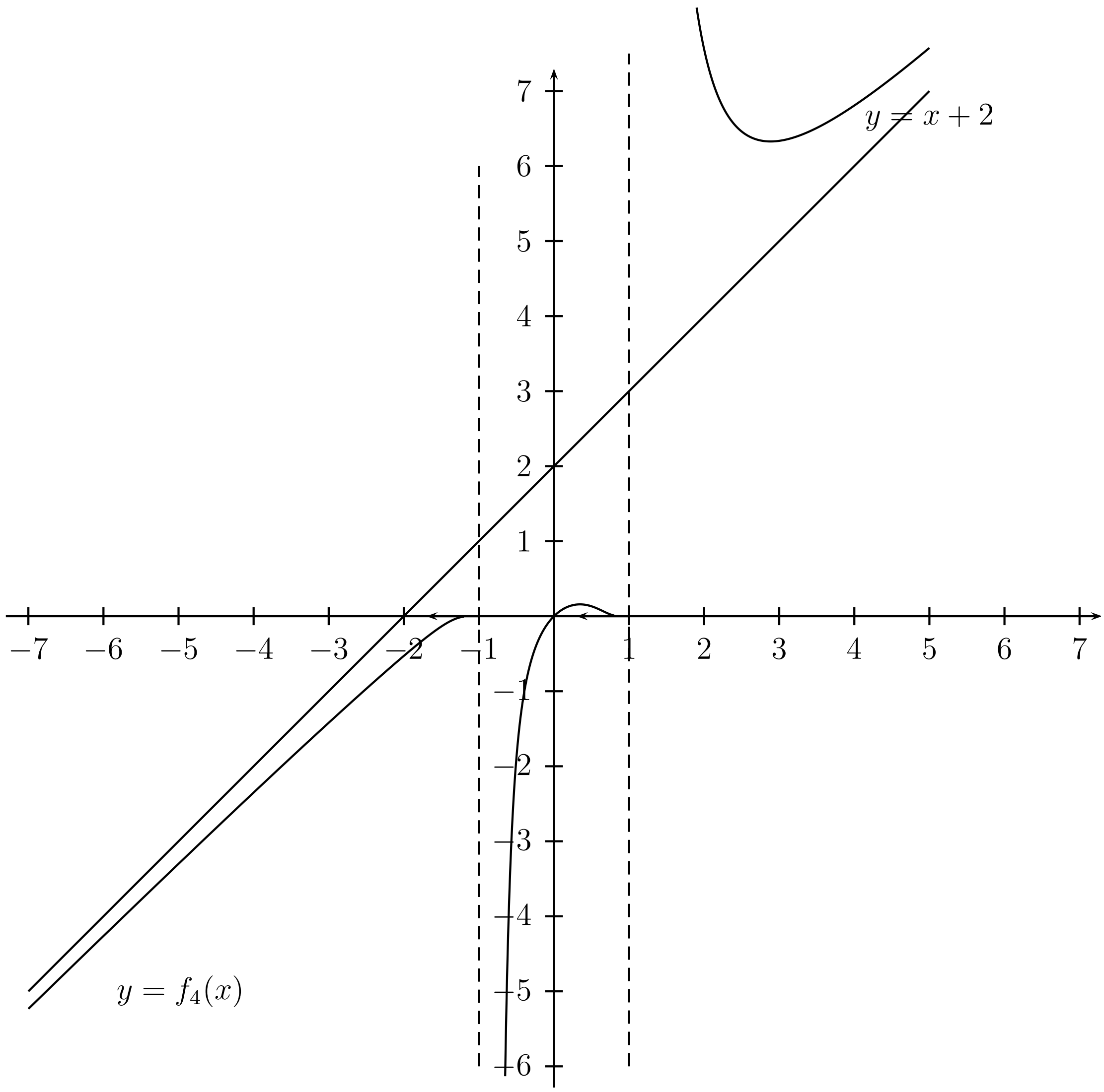
ce qui reste vrai pour $x = 0$.

Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1 > 0$.

Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{5}})2,89... > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in]0,1[$. On en déduit le tableau de variation de f_4.

$$\begin{array}{c|ccc||ccccc||ccccc|}
x & -\infty & & -1 & & 0 & \beta & & 1 & & & \alpha & & +\infty \\
\hline
f_4'(x) & & + & & & + & 0 & - & & - & & 0 & & + \\
\hline
 & & & 0 & & & 0,15... & & & +\infty & & & & +\infty \\
f_4 & & \nearrow & & & \nearrow & & \searrow & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & -\infty & & & -\infty & & & & 0 & & & 6,34... & & \\
\end{array}$$

Graphe.



5. Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Donc, pour $x \neq 0$, > 0 et f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x}-1}{-x} = -\frac{1}{x}\ln(e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} = 1 - f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul x, $f(x) + f(-x) = 1$. Le point de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de C_5.

Etude en 0.

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = \frac{1}{x}((\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x + o(x).$$

Ainsi, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0) = \frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté f_5, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0) = \frac{1}{24}$. Une équation de la tangente à C_5 en le point d'abscisse 0 est $y = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.

Etude en $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(\ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x}) - \ln x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 - e^{-x}}{x} = 1 + o(1).$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = 1$. Par symétrie, $\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - f_5(-x)) = 1 - 1 = 0$.

Dérivée. Variations.

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, (puisque $\ln \frac{e^x-1}{x} = \ln\left|\frac{e^x-1}{x}\right| = \ln|e^x-1| - \ln|x|$),

$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} - 1\right).$$

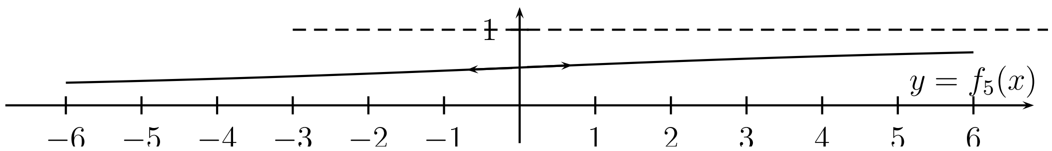
f_5' est, sur $\mathbb{R}^*$, du signe de $g(x) = -\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} + -1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{e^x}{e^x-1} + \frac{1}{x} + \frac{(e^x+xe^x)(e^x-1) - xe^x.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-xe^x(e^x-1) + (e^x-1)^2 + xe^x(e^x-x-1)}{x(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(e^x-1)^2 - x^2e^x}{x(e^x-1)^2} = \frac{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2 - x^2}{x(e^{x/2}-e^{-x/2})^2} \\ &= \frac{(2\operatorname{sh}\frac{x}{2})^2 - x^2}{x(2\operatorname{sh}\frac{x}{2})^2} = \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} - (\frac{x}{2})^2}{x\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

L'inégalité $\operatorname{sh}x > x$, valable pour $x > 0$, est classique (par exemple, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit pour $x > 0$, $\operatorname{sh}x = x + \int_0^x (x-t)\operatorname{sh}t\,dt > x$.) Par suite, g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, et donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En tenant compte de $g(0^+) = 0$, g est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5' et f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Par symétrie et continuité en 0, f_5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Graphe.



6. f_6 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux.

Etude en 1.

$f_6(x) - f_6(1) = x - 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en 1 mais que C_6 admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).

Etude en -1.

$f_6(x) - f_6(-1) = x + 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to -1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en -1 mais que C_6 admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).

Etude en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = x + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui montre tout à la fois que $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$, puis que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_6 en $+\infty$ et que C_6 est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Etude en $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, on a, $f_6(x) = x - x(1 + o(\frac{1}{x})) = o(1)$, et $\lim_{x\to-\infty} f_6(x) = 0$.

Dérivée. Variations.

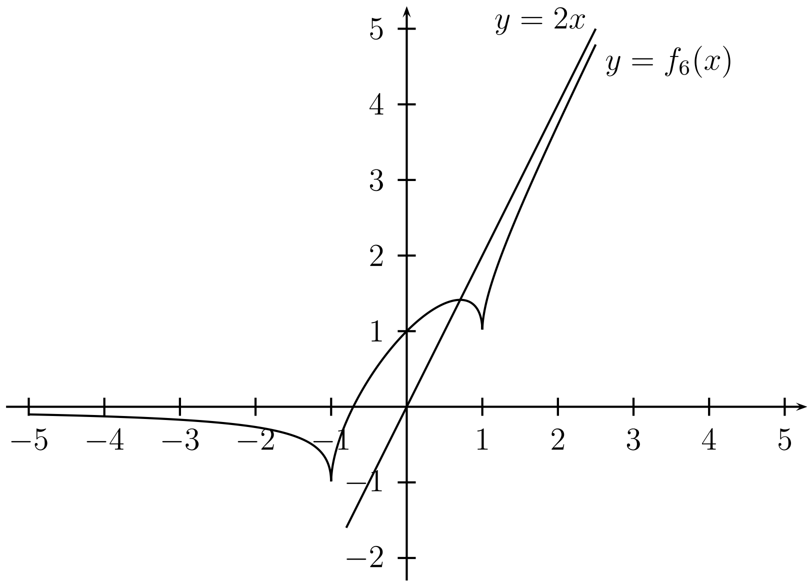
Soit ε le signe de $x^2 - 1$. Pour $x \neq \pm 1$,

$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)} + \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

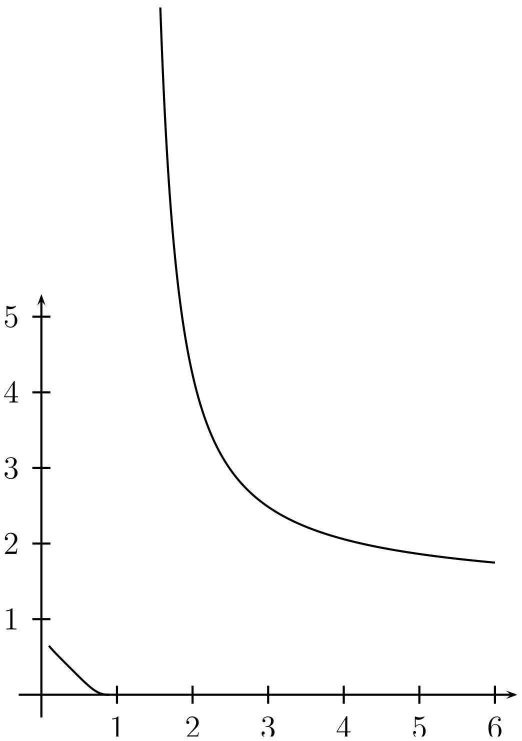
Si $-1 < x \leqslant 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f_6'(x) > 0$.
Si $x < -1$, $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = -$ et $f_6'(x) < 0$.
Si $0 \leqslant x < 1$. $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(-x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(-x^2 - (x^2-1)) = \text{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)$.
D'où le tableau de variations de f_6 :

x	$-\infty$		-1		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f_6'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_6	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty$

Graphe.



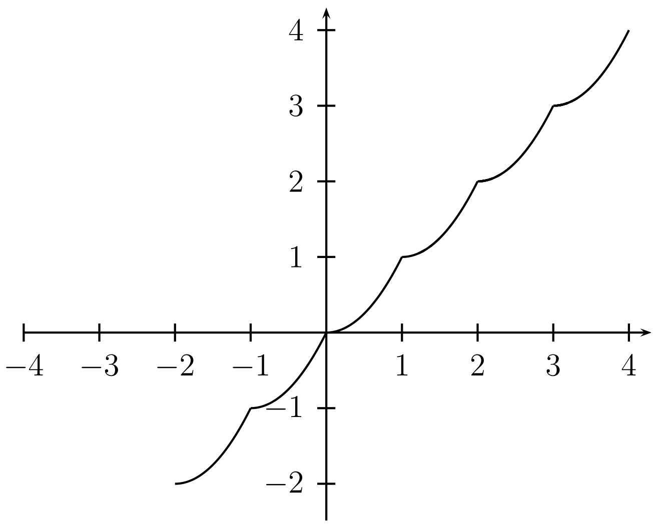
7.



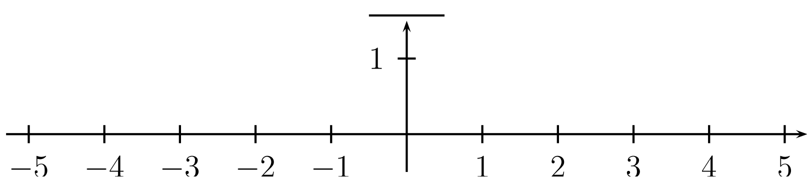
8.

9.

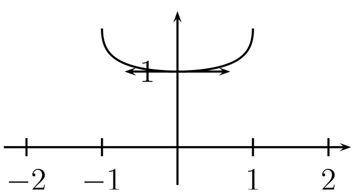
10.



11.



12.



13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.