

## Calculs de limites, développements limités, développements asymptotiques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 IT

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x|^{\cos x}$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\ln|x|}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \cdot e^{1/(1-\sin x)}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow e, x < e} (\ln x)^{\ln(e-x)}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x^x - 1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x$
13.  $\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$
14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cos(a + \frac{1}{x})}{\cos a} \right)^x$  (où  $\cos a \neq 0$ )

[Correction ▼](#)

[005426]

### Exercice 2 IT

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1.  $\frac{1}{1-x^2-x^3}$  (ordre 7 en 0)
2.  $\frac{1}{\cos x}$  (ordre 7 en 0)
3.  $\arccos \sqrt{\frac{x}{\tan x}}$  (ordre 3 en 0)
4.  $\tan x$  (ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$ )
5.  $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$  (ordre 2 en 0)

6.  $\tan^3 x(\cos(x^2) - 1)$  (ordre 8 en 0)

7.  $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$  (ordre 3 en 1)

8.  $\arctan(\cos x)$  (ordre 5 en 0)

9.  $\arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$  (ordre 2 en 0)

10.  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$  (ordre 5 en 0)

11.  $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$  (ordre 10 en 0)

12.  $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$  (ordre 100 en 0)

13.  $\tan \sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}$  (ordre 3 en  $\pi$ )

[Correction ▼](#)

[005427]

---

### Exercice 3 \*\*\*

Soit  $0 < a < b$ . Etude complète de la fonction  $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ .

[Correction ▼](#)

[005428]

---

### Exercice 4 \*\*

Etude au voisinage de  $+\infty$  de  $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1}$ .

[Correction ▼](#)

[005429]

---

### Exercice 5 \*\*

Soit  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ . Calculer  $f^{(n)}(0)$  en moins de 10 secondes puis  $f^{(n)}(x)$  pour  $|x| \neq 1$  en à peine plus de temps.

[Correction ▼](#)

[005430]

---

### Exercice 6 IT

1. Equivalent simple en  $+\infty$  et  $-\infty$  de  $\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1$ .

2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et  $+\infty$  de  $3x^2 - 6x$

3. Equivalent simple en 0 de  $(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x}$ .

4. Equivalent simple en  $+\infty$  de  $x^{\text{th}x}$ .

5. Equivalent simple en 0 de  $\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$ .

[Correction ▼](#)

[005431]

---

### Exercice 7 \*\*IT

Développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^3}$  de  $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ .

[Correction ▼](#)

[005432]

---

### Exercice 8 \*\*IT

1. Développement asymptotique à la précision  $x^2$  en 0 de  $\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$ .

2. Développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{x^3}$  en  $+\infty$  de  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ .

**Exercice 9 \*\***

Soient  $a > 0$  et  $b > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

1. Equivalent simple quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$ .
2. Même question pour  $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$ .

**Exercice 10 \*\*\*I**

Soit  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1. Montrer brièvement que la suite  $u$  est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la suite  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite finie non nulle.  
(b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de  $u_n$ .

**Exercice 11 \*\*I**

Soit  $u$  la suite définie par la donnée de son premier terme  $u_0 > 0$  et la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ . Equivalent simple de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 12 \*\*\*I**

1. Montrer que l'équation  $\tan x = x$  a une unique solution dans l'intervalle  $[n\pi, (n+1)\pi]$  pour  $n$  entier naturel donné. On note  $x_n$  cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de  $x_n$  à la précision  $\frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 13**

1. Montrer que l'équation  $x + \ln x = k$  admet, pour  $k$  réel donné, une unique solution dans  $]0, +\infty[$ , notée  $x_k$ .
2. Montrer que, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , on a :  $x_k = ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$  où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes à déterminer.

**Exercice 14 \*\***

Soit  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$  si  $x \neq 0$  et 1 si  $x = 0$ .

1. Montrer que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f'$  n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

**Exercice 15** \*\*IT

Etude au voisinage de 0 de  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$  (existence d'une tangente ?)

**Exercice 16** \*\*I

1. La fonction  $x \mapsto \arccos x$  admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de  $\arccos x$  en 1.

**Exercice 17** \*\*\*

1. Développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$ .
2. Soit  $a_k$  le  $k$ -ème coefficient. Montrer que  $a_k$  est le nombre de solutions dans  $\mathbb{N}^2$  de l'équation  $p + 2q = k$ .

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Si  $x \in ]0, \pi[$ ,  $\sin x > 0$ , de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de  $\frac{\pi}{2}$  (c'est-à-dire un voisinage de  $\frac{\pi}{2}$  auquel on a enlevé le point  $\frac{\pi}{2}$ ) et de plus  $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$ . Quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sin x$  tend vers 1 et donc

$$\ln(\sin x) \sim \sin x - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 = -\frac{(2x - \pi)^2}{8}.$$

Donc,  $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \rightarrow 0$  et enfin  $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \rightarrow e^0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)} = 1.$$

2. Si  $x \in ]0, \pi[ \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ,  $|\tan x| > 0$ , de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de  $\frac{\pi}{2}$  et de plus  $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|}$ . Quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$

puis  $\cos x \ln|\tan x| \sim -\cos x \ln|\cos x| \rightarrow 0$  (car, quand  $u$  tend vers 0,  $u \ln u \rightarrow 0$ ). Donc,  $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \rightarrow e^0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x} = 1.$$

3. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = 1$  (et on est en présence d'une indétermination du type  $1^{+\infty}$ ). Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi}{3n+1} &= \cos \left( \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{-1} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{6n+1} &= \sin \left( \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-1} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Puis,

$$n \ln \left( \cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right) = n \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = n \left( \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o(1),$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right)^n = e^{\sqrt{3}\pi/24}.$$

4. Quand  $x$  tend vers 0,  $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ . Puis,  $\ln|x| \ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2} \ln|x| \rightarrow 0$ . Donc,  $(\cos x)^{\ln|x|} \rightarrow e^0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\ln|x|} = 1.$$

5. Quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{1}{1-\sin x}$  tend vers  $+\infty$ . Posons  $h = x - \frac{\pi}{2}$  puis  $\varepsilon = \operatorname{sgn}(h)$ , de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon |\sin h| e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand  $h$  tend vers 0,

$$\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2} + o(h^2))(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1 + o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \sim \frac{2}{h^2},$$

et donc, quand  $h$  tend vers 0,  $\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \rightarrow +\infty$ . Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2, x < \pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi/2, x > \pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = -\infty.$$

6. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left( \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour  $x \notin \left( \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc,  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = -3.$$

7. Quand  $x$  tend vers 0,

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} = \frac{1 + x + o(x)}{1 + x + o(x)} = (1 + x + o(x))(1 - x + o(x)) = 1 + o(x).$$

Puis, quand  $x$  tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x} \ln \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right) = \frac{\ln(1 + o(x))}{x + o(x)} = \frac{o(x)}{x + o(x)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 0.$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} \right)^{1/\sin x} = 1.$$

8. Quand  $x$  tend vers  $e$  par valeurs inférieures,  $\ln(x)$  tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \rightarrow 0,$$

et donc  $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \rightarrow 1$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.$$

9. Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures,  $x \ln x \rightarrow 0$ , et donc

$$x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x \sim 1 \times (x-1) = x-1.$$

Ensuite,  $\sqrt{x^2-1}$  tend vers 0 et donc

$$\ln(1 - \sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > e}} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2-1})} = 0.$$

10. Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \sim \ln(\operatorname{ch} x) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \sim x,$$

et donc

$$\frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1} \sim \frac{x \times x}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2 + 1} = 1.$$

11. Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x - x^2) + x - \ln x = x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x = e^{x \ln(\sin x)} = e^{x \ln(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))} = e^{x \ln x} e^{x \ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))} = x^x e^{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = x^x \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$

et,

$$x^{\sin x} = e^{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \ln x} = e^{x \ln x} e^{-\frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x)} = x^x \left( 1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} = x^x \left( 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - x^x \left( 1 - \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right) = x^x \left( \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \right) \sim \frac{x^3 \ln x}{6},$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x} \sim \frac{x^3 \ln x / 6}{-x^2 / 2} = -\frac{x \ln x}{3} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x} = 0.$$

12. Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \ln x + \frac{1}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x \ln x} + o \left( \frac{1}{x \ln x} \right).$$

Ensuite,

$$x \ln \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) = x \ln \left( 1 + \frac{1}{x \ln x} + o \left( \frac{1}{x \ln x} \right) \right) = \frac{1}{\ln x} + o \left( \frac{1}{\ln x} \right) \rightarrow 0.$$

Donc,  $\left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x = \exp \left( x \ln \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) \right) \rightarrow e^0 = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x = 1.$$

13. Quand  $x$  tend vers  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \times \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{4}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (\arcsin)' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} = \frac{\pi}{4}.$$



14. Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$x \ln \left( \frac{\cos \left( a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right) = x \ln \left( \cos \frac{1}{x} - \tan a \sin \frac{1}{x} \right) = x \ln \left( 1 - \frac{\tan a}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \right) = x \left( -\frac{\tan a}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \right) \\ = -\tan a + o(1),$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cos \left( a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right)^x = e^{-\tan a}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cos \left( a + \frac{1}{x} \right)}{\cos a} \right)^x = e^{-\tan a}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1.

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x^2+x^3) + (x^2+x^3)^2 + (x^2+x^3)^3 + o(x^7) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7) \right)^{-1} = 1 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} \right) + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2 + \left( \frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^7) \\ = 1 + \frac{x^2}{2} + x^4 \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \right) + x^6 \left( \frac{1}{720} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) + o(x^7) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7).$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7).$$

### 3. Remarques.

- (a) Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [ \setminus \{0\}$ , on a  $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$  et donc la fonction  $x \mapsto \arccos \left( \frac{x}{\tan x} \right)$  est définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [ \setminus \{0\}$  (qui est un voisinage pointé de 0).
- (b) Quand  $x$  tend vers 0,  $\frac{x}{\tan x} \rightarrow 1$  et donc  $\arccos \left( \frac{x}{\tan x} \right) = o(1)$  (développement limité à l'ordre 0).
- (c) La fonction  $x \mapsto \arccos x$  n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc a priori, c'est mal parti).
- (d) La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

• Recherche d'un équivalent simple de  $\arccos x$  en 1 à gauche. Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $\arccos x \rightarrow 0$  et donc,

$$\arccos x \sim \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Déterminons un équivalent simple de  $\arccos \left( \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \right)$  en 0. D'après ce qui précède,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction  $x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$  n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de  $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned} \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x) \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left( \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right) \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^{-1} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + o(x^5) \right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{x^2}{15} + o(x^2) \right)^{1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left( \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{\tan x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left( 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^{-1/2} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3) \right) = \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left( \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3), \end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) = \left( \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3) \right) - \left( \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3) \right) = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3) \sim \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

$f$  étant paire, on en déduit que

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

(Ce n'est pas un développement limité).

4. La fonction  $x \mapsto \tan x$  est trois fois dérivable en  $\frac{\pi}{4}$  et admet donc en  $\frac{\pi}{4}$  un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG.  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  puis  $(\tan)'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 2$ . Ensuite,  $(\tan)''(x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$  et  $(\tan)''(\frac{\pi}{4}) = 4$ . Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x(1 + \tan^2 x),$$

et  $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 16$ . Finalement,

$$\tan x \underset{x \rightarrow \pi/4}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

$$\frac{1}{x^2} \ln(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2),$$

et donc

$$(\operatorname{ch} x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} = e^{1/2} e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12} x^2 + o(x^2).$$

$$5. \quad (\operatorname{ch} x)^{1/x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12} x^2 + o(x^2).$$

6.  $\tan^3 x(\cos(x^2) - 1) = \tan x \times \tan^2 x(\cos(x^2) - 1)$  et un équivalent de  $\tan^2 x(\cos(x^2) - 1)$  en 0 est  $-\frac{x^6}{2}$ . On écrit donc  $\tan x$  à l'ordre 2. De même, un équivalent de  $\tan^3 x$  est  $x^3$  et on écrit donc  $\cos(x^2) - 1$  à l'ordre 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x^2))^3 \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = (x^3 + o(x^4)) \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = -\frac{x^7}{2} + o(x^8).$$

$$\tan^3 x(\cos(x^2) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^7}{2} + o(x^8).$$

7. On pose  $h = x - 1$  ou encore  $x = 1 + h$ , de sorte que  $x$  tend vers 1 si et seulement si  $h$  tend vers 0.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2} h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6} h^3 + o(h^3)\right) \\ &= \left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)\right) (1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right) h + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right) h^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24}\right) h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)(x-1) + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)(x-1)^2 + \left(-4\ln 2 + \frac{43}{24}\right)(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

8. Pour  $x$  réel, posons  $f(x) = \arctan(\cos x)$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour  $x$  réel,  $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ . Puis,

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2\right)^{-1} \\ &= -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) (2 - x^2 + o(x^3))^{-1} = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc,  $f'$  admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\arctan(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(\cos 0) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\arctan(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

9. Pour  $x > -1$ , posons  $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ .  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et pour  $x > -1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\ &= \frac{1}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-1} (1+x)^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2x}{3} + o(x)\right) \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \left(1 - \frac{x}{4} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x + o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(1 - \frac{17x}{12} + o(x)\right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f'$  admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}x - \frac{17}{144\sqrt{2}}x^2 + o(x^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3 + o(x^7) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^7). \end{aligned}$$

Donc,  $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8)$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin^2 x} &= (\arcsin x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} + o(x^7) \right)^{-2} \\
&= \frac{1}{x^2} \left( 1 - 2 \left( \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} \right) + 3 \left( \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} \right)^2 - 4 \left( \frac{x^2}{6} \right)^3 + o(x^7) \right) \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \left( -\frac{3}{20} + \frac{1}{12} \right) x^2 + \left( -\frac{5}{56} + \frac{3}{40} - \frac{1}{54} \right) x^4 + o(x^5) \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{15} - \frac{31x^4}{945} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$10. \quad \boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{31x^4}{945} + o(x^5).}$$

11. Pour  $x$  réel, posons  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et admet donc des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0 puis, pour  $x$  réel, soit  $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ .  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et, pour  $x$  réel  $g(x) = F(x^2) - F(x)$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,

$$g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x \left( 1 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^8) \right) - \left( 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^9) \right) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^9).$$

Ainsi  $g'$  admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que  $g$  admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de  $g(0) = 0$ , on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10}).}$$

12.

$$\begin{aligned}
\ln \left( \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left( e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) &= \ln(e^x) + \ln \left( 1 - e^{-x} \left( \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) \right) \\
&= x + \ln \left( 1 - (1 + o(1)) \left( \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) \right) = x + \ln \left( 1 - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}) \right) = x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln \left( \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}).}$$

13. Posons  $h = x - \pi$  ou encore  $x = \pi + h$  de sorte que  $x$  tend vers  $\pi$  si et seulement si  $h$  tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)} &= \sqrt[3]{4(\pi^3 + (\pi + h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3 + 12\pi^2h + 12\pi h^2 + 4h^3} \\
&\underset{h \rightarrow 0}{=} 2\pi \left( 1 + \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right)^{1/3} \\
&= 2\pi \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3} \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} \right)^2 + \frac{5}{81} \left( \frac{3h}{2\pi} \right)^3 + o(h^3) \right) \\
&= 2\pi + h + h^2 \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) + h^3 \left( \frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{5}{12\pi^2} \right) + o(h^3) \\
&= 2\pi + h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3).
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}) &= \tan \left( h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3) \right) \\
&= \left( h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} \right) + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3) = h + \frac{h^2}{2\pi} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2} \right) h^3 + o(h^3).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}) \underset{x \rightarrow \pi}{=} (x-1) + \frac{1}{2\pi}(x-1)^2 + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2} \right) (x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque  $a > 0$ ,  $b > 0$  et que pour tout réel  $x$ ,  $\frac{a^x + b^x}{2} > 0$ ,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et pour

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right).$$

**Etude en 0.**

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^{x \ln a} + e^{x \ln b}}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + x\left(\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b\right) + x^2\left(\frac{1}{4} \ln^2 a + \frac{1}{4} \ln^2 b\right) + o(x^2)\right) \\
&= \ln\left(1 + x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} + o(x^2)\right) = x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{\ln^2 a + \ln^2 b}{4} - \frac{1}{2}(x \ln \sqrt{ab})^2 + o(x^2) \\
&= x \ln(\sqrt{ab}) + \frac{1}{8}(\ln^2 a - 2 \ln a \ln b + \ln^2 b)x^2 + o(x^2) = x \ln(\sqrt{ab}) + x^2 \frac{1}{8} \ln^2\left(\frac{a}{b}\right) + o(x^2).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp(\ln(\sqrt{ab}) + \frac{1}{8} \ln^2 \frac{a}{b} x + o(x)) = \sqrt{ab} \left(1 + \frac{1}{8} x \ln^2 \frac{a}{b} + o(x)\right).$$

Ainsi,  $f$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = \sqrt{ab}$ . Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8} \ln^2 \frac{a}{b} (> 0)$ . **Etude en  $+\infty$ .**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2}(a^x + b^x)\right) &= \frac{1}{x} \left( \ln(b^x) - \ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \right) = \frac{1}{x} (x \ln b + o(x)) \quad (\text{car } 0 < \frac{a}{b} < 1) \\
&= \ln b + o(1).
\end{aligned}$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b (= \text{Max}\{a, b\})$ . **Etude en  $-\infty$ .** Pour tout réel  $x$ ,

$$f(-x) = \left( \frac{a^{-x} + b^{-x}}{2} \right)^{-1/x} = \left( \frac{a^x + b^x}{2a^x b^x} \right)^{-1/x} = \frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{ab}{f(X)} = \frac{ab}{b} = a \quad (= \text{Min}\{a, b\}).$$

**Dérivée et variations.**  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour  $x \neq 0$  (puisque  $f > 0$  sur  $\mathbb{R}^*$ ),

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f)'(x) = \left( \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) \right)'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) + \frac{1}{x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

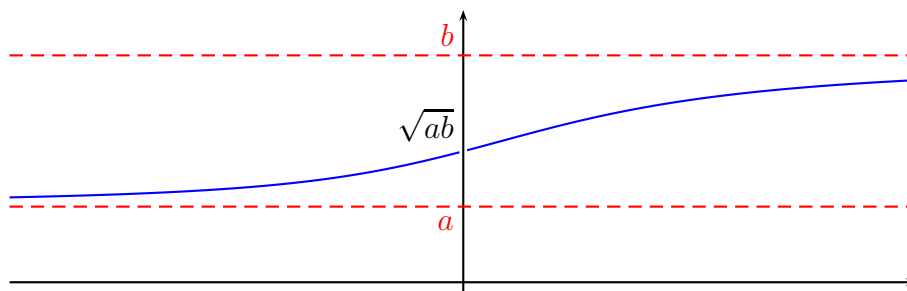
$f'$  a le même signe que  $(\ln f)'$  qui, elle-même, a le même signe que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -\ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) + x \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} + x \frac{(a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b)(a^x + b^x) - (a^x \ln a + b^x \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2} \\ &= x \frac{(ab)^x (\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}. \end{aligned}$$

$g'$  est donc strictement négative sur  $] -\infty, 0[$  et strictement positive sur  $] 0, +\infty[$ . Par suite,  $g$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$  et strictement croissante sur  $] 0, +\infty[$ .  $g'$  admet donc un minimum global strict en 0 et puisque  $g(0) = 0$ , on en déduit que  $g$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^*$ . De même,  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^*$ . En tant compte de l'étude en 0, on a montré que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Le **graphe de  $f$**  a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{x \rightarrow +\infty} f$  fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sqrt{x^2 - 3} = x \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{1/2} = x \left( 1 - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1} = 2x \left( 1 + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{1/3} = 2x \left( 1 + \frac{7}{24x} - \frac{49}{576x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2x + \frac{7}{12} - \frac{49}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{383}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de  $f$  admet donc en  $+\infty$  une droite asymptote d'équation  $y = -x - \frac{7}{12}$ . De plus, le signe de  $f(x) - \left(-x - \frac{7}{12}\right)$  est, au voisinage de  $+\infty$ , le signe de  $-\frac{383}{288x}$ . Donc la courbe représentative de  $f$  est au-dessous de la droite d'équation  $y = -x - \frac{7}{12}$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

$f$  est de classe  $C^\infty$  sur son domaine  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  en tant que fraction rationnelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + \dots + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.$$

Ensuite, pour  $x \notin \{-1, 1\}$ , et  $n$  entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right).$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x - x = -2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 = \frac{(x^2 + 3x + 5) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3x + 2x}{x + x} = \frac{5}{2}.$$

2.  $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -6x$  et  $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2$ . Ensuite, quand  $x$  tend vers 1,  $3x^2 - 6x$  tend vers  $-3 \neq 0$  et donc,  $3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -3$ . Enfin,  $3x^2 - 6x = 3x(x-2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 6(x-2)$ .

$$3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -6x \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2 \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -3 \quad 3x^2 - 6x \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 6(x-2).$$

3.

$$(x-x^2) \ln(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x-x^2) \ln x + (x-x^2) \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = x \ln x - x^2 \ln x + o(x^2 \ln x).$$

Ensuite,

$$\sin x \ln(x-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x + \ln(1-x)) = \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (\ln x - x + o(x)) = x \ln x + o(x^2 \ln x).$$



Donc,

$$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} &= e^{x \ln x} (e^{-x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)} - e^{o(x^2 \ln x)}) = e^{x \ln x} (1 - x^2 \ln x - 1 + o(x^2 \ln x)) \\ &= (1 + o(1))(-x^2 \ln x + o(x^2 \ln x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 \ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 \ln x.}$$

4.  $\operatorname{th} x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} = (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x})) = 1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$ , et donc  $\operatorname{th} x \ln x = (1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})) \ln x = \ln x + o(1)$ . Par suite,

$$x^{\operatorname{th} x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

5. **Tentative à l'ordre 3.**

$$\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}(x^3) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \text{ et,}$$

$$\sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{6}(x^3) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \text{ Donc, } \tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3). \text{ L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Tentative à l'ordre 5.}$$

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{2}{15}(x^5) + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + x^5 \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right) + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) &= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \frac{1}{120}(x^5) + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5).\end{aligned}$$

Donc,  $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$ . L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto \sin(\tan x)$  et  $x \mapsto \tan(\sin x)$  est très fort. **Tentative à l'ordre 7.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \\ &= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{3}\left(3 \times \frac{1}{120} + 3 \times \frac{1}{36}\right) + \frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7) \\ &= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\sin(\tan x) &= \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{x^7}315 + o(x^7)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 - \frac{1}{5040}(x)^7 + o(x^7) \\
&= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{6}\left(3 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{120} \times \frac{5}{3} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7) \\
&= x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \frac{1}{72} - \frac{1}{5040}\right)x^7 + o(x^7).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{72}\right)x^7 + o(x^7) = \frac{x^7}{30} + o(x^7),$$

et donc

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

Pour  $n \geq 5$ , on a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leq n^3 \sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq n^3(n-4) \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc,  $\sum_{k=0}^{n-5} \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$  et de même  $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Il reste

$$\begin{aligned}
u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left( \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^{-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left( - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right)^2 - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^3 + \left( \frac{x}{2} \right)^4 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left( -\frac{x}{2} + x^2 \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) + x^3 \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + x^4 \left( -\frac{1}{120} + \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{24} \right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2).}$$

$$\begin{aligned} x \ln(x+1) - (x+1) \ln x &= x \left( \ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln x + x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \\ &= -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{x \ln(x+1) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

2.

### Correction de l'exercice 9 ▲

1.

$$f_n(a) = \exp \left( n \ln \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left( a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = e^a \left( 1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

En remplaçant  $a$  par  $b$  ou  $a+b$ , on obtient

$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{a+b} \left( 1 - \frac{(a+b)^2}{2n} \right) - e^a \left( 1 - \frac{a^2}{2n} \right) e^b \left( 1 - \frac{b^2}{2n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= e^{a+b} \frac{-(a+b)^2 + a^2 + b^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{ab e^{a+b}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc, si  $ab \neq 0$ ,  $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{ab e^{a+b}}{n}$ . Si  $ab = 0$ , il est clair que  $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) = 0$ .

2.  $e^{-a} f_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left( -a + \left( a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = 1 + \left( -\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{a^2}{2n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , et donc

$$e^{-a} f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8} \right) \frac{1}{n^2}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , posons  $f(x) = \sin x$ . On a  $f(]0, \frac{\pi}{2}[) = ]0, 1[ \subset ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc, puisque  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Il est connu que  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin x < x$  et de plus, pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$ . La suite  $u$  est à valeurs dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$ . La suite  $u$  est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel  $\ell$  de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  qui vérifie ( $f$  étant continue sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ )  $f(\ell) = \ell$  ou encore  $\ell = 0$ . En résumé,

la suite  $u$  est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

2. Soit  $\alpha$  un réel quelconque. Puisque la suite  $u$  tend vers 0, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\sin u_n)^\alpha - u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left( \left( 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\alpha - 1 \right) = u_n^\alpha \left( -\alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) \\ &= -\alpha \frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = -2$  on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CESARO,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3} + o(1)$  ou encore  $\frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{3} + o(1)$  ou enfin,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Par suite, puisque la suite  $u$  est strictement positive,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

### Correction de l'exercice 11 ▲

Il est immédiat par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$  et donc, puisque la suite  $u$  est strictement positive,  $u_{n+1} < u_n$ . La suite  $u$  est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel  $\ell$  vérifiant  $\ell = \ell e^{-\ell}$  ou encore  $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$  ou encore  $\ell = 0$ .

$u$  est strictement positive, strictement décroissante et converge vers 0.

Soit  $\alpha$  un réel quelconque. Puisque la suite  $u$  tend vers 0,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha (e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^\alpha (-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour  $\alpha = -1$ , on obtient en particulier  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$ . Puis, comme au numéro précédent,  $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

Pour  $n$  entier naturel donné, posons  $I_n = ]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ . • Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in I_n$ , posons  $f(x) = \tan x - x$ .  $f$  est dérivable sur  $I_n$  et pour  $x$  dans  $I_n$ ,  $f'(x) = \tan^2 x$ . Ainsi,  $f$  est dérivable sur  $I_n$  et  $f'$  est strictement positive sur  $I_n \setminus \{n\pi\}$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $I_n$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I_n$  et réalise donc une bijection de  $I_n$  sur  $f(I_n) = \mathbb{R}$ . En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists ! x_n \in I_n / f(x_n) = 0$  (ou encore tel que  $\tan x_n = x_n$ ). • On a  $x_0 = 0$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n\pi) = -n\pi < 0$  et donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in ]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ . En particulier,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + O(1).$$

• Posons alors  $y_n = x_n - n\pi$ .  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y_n \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . De plus,  $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$  et donc, puisque  $y_n \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \arctan(y_n + n\pi) \geq \arctan(n\pi).$$

Puisque  $\arctan(n\pi)$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$  ou encore

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

• Posons maintenant  $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ . D'après ce qui précède,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_n \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  et d'autre part  $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ . Ensuite,  $\tan(z_n + \frac{\pi}{2}) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$  et donc  $-\cotan(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$ . Puisque  $z_n$  tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\cotan(z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore  $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$ . Ainsi,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

• Posons enfin  $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ . On sait que  $t_n = o(\frac{1}{n})$  et que

$$-\cotan(t_n - \frac{1}{n\pi}) = -\cotan(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} \left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc  $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2})$ . Finalement,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

1. Pour  $x > 0$ , posons  $f(x) = x + \ln x$ .  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur  $]0, +\infty[$ .  $f$  réalise donc une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ . En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists ! x_k \in ]0, +\infty[ / f(x_k) = k.$$

2.  $f(\frac{k}{2}) = \frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2} < k$  pour  $k$  suffisamment grand (car  $k - (\frac{k}{2} + \ln \frac{k}{2}) = \frac{k}{2} - \ln \frac{k}{2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$  d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour  $k$  suffisamment grand,  $f(\frac{k}{2}) < f(x_k)$ . Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , on en déduit que  $x_k > \frac{k}{2}$  pour  $k$  suffisamment grand et donc que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$ . Mais alors,  $k = x_k + \ln x_k \sim x_k$  et donc, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ ,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k + o(k).$$

Posons  $y_k = x_k - k$ . On a  $y_k = o(k)$  et de plus  $y_k + \ln(y_k + k) = 0$  ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) = -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + o(1).$$

Posons  $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$ . Alors,  $z_k = o(1)$  et  $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$ . Par suite,

$$z_k = \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) = -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

## Correction de l'exercice 14 ▲

1.  $x^3 \sin \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^3)$  et en particulier  $x^3 \sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ . Donc, en tenant compte de  $f(0) = 1$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

$f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2.  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ . Donc,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que  $f$  est continue et dérivable en 0 avec  $f(0) = f'(0) = 1$ .  $f$  est d'autre part dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux (et donc sur  $\mathbb{R}$ ) et pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$ .
3.  $f'$  est définie sur  $\mathbb{R}$  mais n'a pas de limite en 0.  $f'$  n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

---

**Correction de l'exercice 15 ▲**

---

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$ , et donc

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Puis,

$$\frac{1}{\arcsin x} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4) \right)^{-1} = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + o(x^4) \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3),$$

et donc,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} = \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o(x^3).$$

La fonction  $f$  proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ . Le prolongement est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{6}$ . La courbe représentative de  $f$  admet à l'origine une tangente d'équation  $y = \frac{x}{6}$ . Le signe de la différence  $f(x) - \frac{x}{6}$  est, au voisinage de 0, le signe de  $\frac{17x^3}{360}$ . La courbe représentative de  $f$  admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation  $y = \frac{x}{6}$ .

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

---

1.  $\arccos x = o(1)$  (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction  $x \mapsto \arccos x$  n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

2) Puisque  $\arccos x = o(1)$ ,

$$\arccos x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\arccos x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

---

1. Quand  $x$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^n x^k + 2 \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2. On a aussi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) \left( \sum_{k=0}^n x^{2k} \right) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{p+2q=k} 1 \right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.$$

( $a_k$  est le nombre de façons de payer  $k$  euros en pièces de 1 et 2 euros).

---