



## Fonctions réelles d'une variable réelle dérivables (exclu études de fonctions)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*

Soit  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x), x \in [a, b]\}$ . Montrer que  $f$  est affine.

[Correction ▼](#)

[005407]

### Exercice 2 \*\*\* Formule de TAYLOR-LAGRANGE

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $n$  un entier naturel. Soit  $f$  une fonction élément de  $C^n([a, b], \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a, b[, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à la fonction  $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$  où  $A$  est intelligemment choisi.

[Correction ▼](#)

[005408]

### Exercice 3 \*\*\* Formule des trapèzes

Soit  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a, b[, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - f^{(3)}(c).$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à  $g'$  puis  $g$  où  $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$  où  $A$  est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace  $f$  par  $F$  une primitive d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et deux fois dérivable sur  $]a, b[$ ? Interprétez géométriquement.

[Correction ▼](#)

[005409]

### Exercice 4 \*\*

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $I$  et même dérivable à droite et à gauche en tout point de  $I$ .

[Correction ▼](#)

[005410]

### Exercice 5 \*\*\* Inégalités de convexité

- Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n, n$  réels positifs ou nuls et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, n$  réels strictement positifs tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ . Montrer que  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ . En déduire que  $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .
- Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
  - Montrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$  positifs ou nuls,  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  avec égalité si et seulement si  $a^p = b^q$ .

(b) Soient  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$ ,  $2n$  nombres complexes. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \quad (\text{Inégalité de HÖLDER}).$$

(c) Montrer que la fonction  $x \mapsto x^p$  est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.

(d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas  $p = q = 2$  (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

[Correction ▼](#)

[005411]

### Exercice 6 \*\*\*I Polynômes de LEGENDRE

Pour  $n$  entier naturel non nul donné, on pose  $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .
2. En étudiant le polynôme  $A_n = (X^2 - 1)^n$ , montrer que  $L_n$  admet  $n$  racines réelles simples et toutes dans  $] -1; 1[$ .

[Correction ▼](#)

[005412]

### Exercice 7 \*\*

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée  $n$ -ème de la fonction proposée :

$$1) x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x) \quad 2) x \mapsto \cos^3 x \sin(2x) \quad 3) x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3} \quad 4) x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x.$$

[Correction ▼](#)

[005413]

### Exercice 8 \*\*\*I

Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x \neq 0$  et  $0$  si  $x = 0$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005414]

### Exercice 9 \*\*

Montrer que pour tout réel strictement positif  $x$ , on a :  $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ .

[Correction ▼](#)

[005415]

### Exercice 10 \*\*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$  pour un certain  $a$  non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de  $O$  de la courbe représentative de  $f$  en lequel la tangente passe par l'origine.

[Correction ▼](#)

[005416]

### Exercice 11 \*\*\*\* Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $I$  vérifiant  $f'(a) < f'(b)$  et soit enfin un réel  $m$  tel que  $f'(a) < m < f'(b)$ .

1. Montrer qu'il existe  $h > 0$  tel que  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ .
2. Montrer qu'il existe  $y$  dans  $[a, b]$  tel que  $m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$  puis qu'il existe  $x$  tel que  $f'(x) = m$ .

[Correction ▼](#)

[005417]

### Exercice 12 \*\*\*\*

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2$  (Indication. Appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE entre  $x$  et  $x+y$  puis entre  $x$  et  $x-y$ ).

[Correction ▼](#)

[005418]

### Exercice 13 \*IT

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \cos \sqrt{x}$ .

[Correction ▼](#)

[005419]

### Exercice 14 \*\*

Soit  $P$  un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si  $P$  n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de  $P'$ .
2. Montrer que si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même de  $P'$ .

[Correction ▼](#)

[005420]

### Exercice 15 \*\* Généralisation du théorème des accroissements finis

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a,b]$  et dérivables sur  $]a,b[$ .

Soit  $\Delta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que  $\Delta$  est continue sur  $[a,b]$ , dérivable sur  $]a,b[$  et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe  $c$  dans  $]a,b[$  tel que  $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$ .

[Correction ▼](#)

[005421]

### Exercice 16 \*\*

Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005422]

### Exercice 17 \*\*\*

Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout  $x$  réel,  $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$ . En remarquant que  $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$ , montrer que  $f'$  est constante puis déterminer  $f$ .

[Correction ▼](#)

[005423]

### Exercice 18 \*\*\*I

Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . (Indication. Considérer  $g(x) = e^x f(x)$ ).

[Correction ▼](#)

[005424]

### Exercice 19 \*\*\*I

Etudier la suite  $(u_n)$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $u_0 \geq -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ ,
- 2)  $u_0 > -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$
- 3)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$ ,
- 4)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$ ,
- 5)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(2u_n)$ ,
- 6)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ .

[Correction ▼](#)

[005425]

### Correction de l'exercice 1 ▲

$f'$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et donc est bornée sur ce segment. Soit  $M = \sup\{f'(x), x \in [a, b]\}$ , et soit  $g$  la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que  $f$  en  $a$  et  $b$  (c'est-à-dire  $\forall x \in [a, b], g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ ) puis  $h = f - g$ . On va montrer que  $h = 0$  sous l'hypothèse  $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

$h$  est dérivable sur  $[a, b]$  et, pour  $x \in [a, b], h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - M \leq 0$ .  $h$  est donc décroissante sur  $[a, b]$ . Par suite,  $\forall x \in [a, b], 0 = h(b) \leq h(x) \leq h(a) = 0$ . Ainsi,  $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$ , ou encore  $f = g$ .  $f$  est donc affine sur  $[a, b]$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

On a déjà  $g(b) = f(b) - f(b) = 0$ . Puisque  $a \neq b$ , on peut choisir  $A$  tel que  $g(a) = 0$  (à savoir  $A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)$ ).

Avec les hypothèses faites sur  $f$ ,  $g$  est d'autre part continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Le théorème de ROLLE permet alors d'affirmer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

Pour  $x \in ]a, b[$ , on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^n}{n!} = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\frac{(b-c)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(c)) = 0$ , et donc, puisque  $c \neq b$ , tel que  $A = f^{(n+1)}(c)$ . L'égalité  $g(a) = 0$  s'écrit alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel  $c$  de  $]a, b[$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Pour  $x \in [a, b]$ , posons  $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$  où  $A$  est choisi de sorte que  $g(b) = g(a) = 0$  (c'est-à-dire  $A = \frac{1}{(b-a)^3}(f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)))$ ).

$f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a, b[, \mathbb{R})$  et donc  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$ . Pour  $x \in [a, b]$ , on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) - 6A(x-a) = \frac{x-a}{2}(-12A - f^{(3)}(x)).$$

$g$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et vérifie de plus  $g(a) = g(b)$ . Donc, d'après le théorème de ROLLE, il existe  $d \in ]a, b[$  tel que  $g'(d) = 0$ . De même,  $g'$  est continue sur  $[a, d] \subset [a, b]$ , dérivable sur  $]a, d[ (\neq \emptyset)$  et vérifie de plus  $g'(a) = g'(d) (= 0)$ . D'après le théorème de ROLLE, il existe  $c \in ]a, d[ \subset ]a, b[$  tel que  $g''(c) = 0$  ou encore tel que  $A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$  (puisque  $c \neq a$ ).

En écrivant explicitement l'égalité  $g(b) = 0$ , on a montré que :

$$\exists c \in ]a, b[ / f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$  et si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ , la formule précédente s'écrit :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = \frac{b-a}{2}(F'(b) + F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

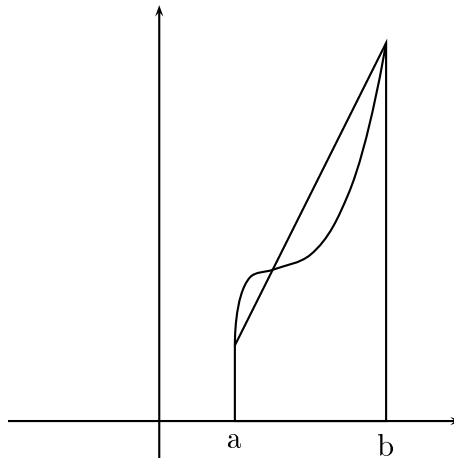
Donc, si  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a, b[, \mathbb{R})$ ,

$$\exists c \in ]a, b[ / \int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique.

Si  $f$  est positive,  $A_1 = \int_a^b f(t) dt$  est l'aire du domaine  $D = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$  et  $A_2 = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$  est l'aire du trapèze  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ . Si  $M_2 = \sup\{|f''(x)|, x \in [a, b]\}$  existe dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$|A_1 - A_2| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$



#### Correction de l'exercice 4 ▲

Supposons que  $f$  est convexe sur un intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  ( $a$  et  $b$  réels ou infinis).

Soit  $x_0 \in I$ . On sait que la fonction pente en  $x_0$  est croissante.

Pour  $x \neq x_0$ , posons  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Soit  $x'$  un élément de  $]x_0, b[$ .  $\forall x \in ]a, x_0[$ , on a  $g(x) < g(x')$ , ce qui montre que  $g$  est majorée au voisinage de  $x_0$  à gauche. Étant croissante,  $g$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures ou encore,  $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  est donc dérivable à gauche en  $x_0$ . On montre de même que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ .

Finalement,  $f$  est dérivable à droite et à gauche en tout point de  $]a, b[$ . En particulier,  $f$  est continue à droite et à gauche en tout point de  $]a, b[$  et donc continue sur  $]a, b[$ .

#### Correction de l'exercice 5 ▲

1. La fonction  $f : x \mapsto \ln x$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  et, pour  $x > 0$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ . Par suite,  $f$  est concave sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (]0, 1[)^n, \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \Rightarrow \ln\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k)\right),$$

et donc par croissance de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ ,

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Si l'un des  $x_k$  est nul, l'inégalité précédente est immédiate.

En choisissant en particulier  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ , de sorte que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in ]0, 1[)^n$  et que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in ([0, +\infty[)^n, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

2. (a) Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (de sorte que l'on a même  $\frac{1}{p} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et donc  $p > 1$  et aussi  $q > 1$ ).

Si  $a = 0$  ou  $b = 0$ , l'inégalité proposée est immédiate.

Soit alors  $a$  un réel strictement positif puis, pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$ .

$f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  (car  $q > 1$ ) et pour  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = x^{q-1} - a$ .  $q$  étant un réel strictement plus grand que 1,  $q-1$  est strictement positif et donc, la fonction  $x \mapsto x^{q-1}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Par suite,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{q-1} > a \Leftrightarrow x > a^{1/(q-1)}.$$

$f$  est donc strictement décroissante sur  $[0, a^{1/(q-1)}]$  et strictement croissante sur  $[a^{1/(q-1)}, +\infty[$ . Ainsi,

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq f(a^{1/(q-1)}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a \cdot a^{1/(q-1)}.$$

Maintenant,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  fournit  $q = \frac{p}{p-1}$  puis  $q-1 = \frac{1}{p-1}$ . Par suite,  $\frac{q}{q-1} = p$ . Il en résulte que

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a \cdot a^{1/(q-1)} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)a^p = 0.$$

$f$  est donc positive sur  $[0, +\infty[$ , ce qui fournit  $f(b) \geq 0$ . De plus,

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{1/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^{q/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^p.$$

- (b) Soient  $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$  et  $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$ .

Si  $A = 0$ , alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_k = 0$  et l'inégalité est immédiate. De même, si  $B = 0$ .

Si  $A > 0$  et  $B > 0$ , montrons que  $\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq 1$ .

D'après a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{p} \frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{|b_k|^q}{B} \right) = \frac{1}{pA} \cdot A + \frac{1}{qB} \cdot B = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

- (c) Pour  $p > 1$ , la fonction  $x \mapsto x^p$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$ . Donc, la fonction  $x \mapsto x^p$  est strictement convexe sur  $]0, +\infty[$  et donc sur  $[0, +\infty[$  par continuité en 0. Donc,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in ([0, +\infty[)^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in ([0, +\infty[)^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \left( \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \right)^p \leq \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \leq \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On applique alors ce qui précède à  $\lambda_k = |b_k|^q$  puis  $x_k = \lambda_k^{-1/p} |a_k|$  (de sorte que  $\lambda_k x_k = |a_k b_k|$ ) et on obtient l'inégalité désirée.

- (d) Pour  $p = q = 2$ , c'est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ démontrée dans une planche précédente.

### Correction de l'exercice 6 ▲

- $(X^2 - 1)^n$  est de degré  $2n$  et donc,  $L_n$  est de degré  $2n - n = n$ . Puis,  $\text{dom}(L_n) = \text{dom}((X^{2n})^{(n)}) = \frac{(2n)!}{n!}$ .
- 1 et  $-1$  sont racines d'ordre  $n$  de  $A_n$  et donc racines d'ordre  $n - k$  de  $A_n^{(k)}$ , pour tout  $k$  élément de  $\{0, \dots, n\}$ .

Montrons par récurrence sur  $k$  que  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $A_n^{(k)}$  s'annule en au moins  $k$  valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle  $] - 1, 1[$ .

Pour  $k = 1$ ,  $A_n$  est continu sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] - 1, 1[$ . De plus,  $A_n(0) = A_n(1) = 0$  et d'après le théorème de ROLLE,  $A_n'$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $] - 1, 1[$ .

Soit  $k$  élément de  $\{1, \dots, n - 1\}$ . Supposons que  $A_n^{(k)}$  s'annule en au moins  $k$  valeurs de  $] - 1, 1[$ .  $A_n^{(k)}$  s'annule de plus en 1 et  $-1$  car  $k \leq n - 1$  et donc s'annule en  $k + 2$  valeurs au moins de l'intervalle  $[-1, 1]$ . D'après le théorème de ROLLE,  $A_n^{(k+1)}$  s'annule en au moins  $k + 1$  points de  $] - 1, 1[$  (au moins une fois par intervalle ouvert).

On a montré que  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $A_n^{(k)}$  s'annule en au moins  $k$  valeurs de  $] - 1, 1[$ . En particulier,  $A_n^{(n)} = L_n$  s'annule en au moins  $n$  réels deux à deux distincts de  $] - 1, 1[$ . Puisque  $L_n$  est de degré  $n$ , on a trouvé toutes les racines de  $L_n$ , toutes réelles, simples et dans  $] - 1, 1[$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

- Pour  $n \geq 1$ , on a d'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned} (x^{n-1} \ln(1+x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{n-1})^{(k)} (\ln(1+x))^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (x^{n-1})^{(k)} (\ln(1+x))^{(n-k)} \quad (\text{car } (x^{n-1})^{(n)} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} (-1)^{n-1-k} \frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}} \\ &\quad (\text{car } (\ln(1+x))^{(n-k)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-k-1)}). \end{aligned}$$

Puis, pour  $x = 0$ ,  $(x^{n-1} \ln(1+x))^{(n)}(0) = n \cdot (n-1)! = n!$ , et pour  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} (x^{n-1} \ln(1+x))^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(-\frac{x}{x+1}\right)^{n-k} = -\frac{(n-1)!}{x} \left(\left(1 - \frac{x}{x+1}\right)^n - 1\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1)^n}. \end{aligned}$$

- On sait dériver facilement des sommes ou plus généralement des combinaisons linéaires. Donc, on linéarise :

$$\begin{aligned} \cos^3 x \sin(2x) &= \frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix})^3 \left(-\frac{1}{4}\right) (e^{2ix} - e^{-2ix}) = -\frac{1}{32} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}) = -\frac{1}{16} (\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x)) \end{aligned}$$

Puis, pour  $n$  naturel donné :

$$(\cos^3 x \sin 2x)^{(n)} = -\frac{1}{16} \left(5^n \cos\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

expression que l'on peut détailler suivant la congruence de  $n$  modulo 4.

3. On sait dériver des objets simples et donc on décompose en éléments simples :

$$\frac{X^2 + 1}{(X - 1)^3} = \frac{X^2 - 2X + 1 + 2X - 2 + 2}{(X - 1)^3} = \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{2}{(X - 1)^3}.$$

Puis, pour  $n$  entier naturel donné,

$$\begin{aligned} \left( \frac{X^2 + 1}{(X - 1)^3} \right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(X - 1)^{n+1}} + 2 \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X - 1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n (n+2)!}{(X - 1)^{n+3}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X - 1)^{n+3}} ((X - 1)^2 + 2(n+1)(X - 1) + (n+2)(n+1)) \\ &= \frac{(-1)^n n! (X^2 + 2nX + n^2 + n + 1)}{(X - 1)^{n+3}}. \end{aligned}$$

4. La fonction proposée est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  en vertu de théorèmes généraux. La formule de LEIBNIZ fournit pour  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} ((x^3 + 2x - 7)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^3 + 2x - 7)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} (x^3 + 2x - 7)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= ((x^3 + 2x - 7) + n(3x^2 + 2) + \frac{n(n-1)}{2}(6x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 6) e^x \\ &= (x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2)x + n^3 - 3n^2 + 4n - 7) e^x. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

$f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux.

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ .

C'est vrai pour  $n = 0$  avec  $P_0 = 1$ .

Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = \left( \frac{2}{x^3} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} + (P_n'(x)) \frac{1}{x^{3n}} - 3n P_n(x) \frac{1}{x^{3n+1}} \right) e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2},$$

où  $P_{n+1} = 2P_n + X^3 P_n' - 3nX^2 P_n$  est un polynôme. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Pour  $n = 0$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et de plus,  $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 0 = f(0)$ . Donc,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$ . Alors, d'une part  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et  $C^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}^*$  et de plus, d'après les théorèmes de croissances comparées,  $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0,  $x \neq 0$ . D'après un théorème classique d'analyse,  $f$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier,  $f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ .

On a montré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$ .  $f$  est donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Montrons que  $(\forall x > 0, (1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ . Soit  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} &\Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(x+1) - \ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \end{aligned}$$



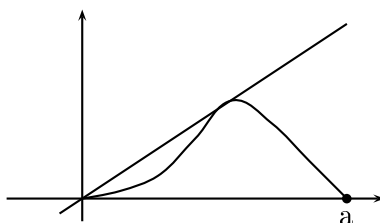
Soit  $x$  un réel strictement positif fixé. Pour  $t \in [x, x+1]$ , posons  $f(t) = \ln t$ .  $f$  est continue sur  $[x, x+1]$  et dérivable sur  $]x, x+1[$ . Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c$  dans  $]x, x+1[$  tel que  $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$  ou encore

$$\exists c \in ]x, x+1[ / \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que  $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ , et donc que

$$\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲



Soit  $x_0$  un réel non nul. Une équation de la tangente  $(T_{x_0})$  à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$  est  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .  $(T_{x_0})$  passe par l'origine si et seulement si

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Pour  $x$  réel, on pose  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  ( $g$  est « la fonction pente à l'origine »).

Puisque  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  est déjà continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

Puisque  $f$  est dérivable en 0 et que  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $g$  est de plus continue en 0.

Finalement,  $g$  est continue sur  $[0, a]$ , dérivable sur  $]0, a[$  et vérifie  $g(0) = g(a) (= 0)$ . D'après le théorème de ROLLE, il existe un réel  $x_0$  dans  $]0, a[$  tel que  $g'(x_0) = 0$ . Puisque  $x_0$  n'est pas nul, on a  $g'(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$ .

L'égalité  $g'(x_0) = 0$  s'écrit  $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$  et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$  passe par l'origine.

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit  $m$  un élément de  $]f'(a), f'(b)[$ . Puisque  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$  et que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = f'(b)$ , on a (en prenant par exemple  $\varepsilon = \text{Min}\{m - f'(a), f'(b) - m\} > 0$ )

$$\begin{aligned} \exists h_1 > 0 / \forall h \in ]0, h_1[, (a+h \in I \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m \text{ et} \\ \exists h_2 > 0 / \forall h \in ]0, h_2[, (b+h \in I \Rightarrow \frac{f(b+h) - f(b)}{h} > m. \end{aligned}$$

L'ensemble  $E = \{h \in ]0, \text{Min}\{h_1, h_2\}[ / a+h \text{ et } b+h \text{ sont dans } I\}$  n'est pas vide (car  $I$  est ouvert) et pour tous les  $h$  de  $E$ , on a :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ .  
 $h > 0$  est ainsi dorénavant fixé.

2. La fonction  $f$  est continue sur  $I$  et donc, la fonction  $g : x \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  est continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $g(a) < m < g(b)$ ,  $\exists y \in [a, b] / g(y) = m$  ou encore  $\exists y \in [a, b] / \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = m$ .

Maintenant, d'après le théorème des accroissements finis,  $\exists x \in ]y, y+h[ \subset I / m = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = f'(x)$ .

Donc une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue mais vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de DARBOUX).

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Puisque  $f$  est de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ , la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 2 permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \text{ et} \\ f(x-y) &= f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (f(x)^2) &\geq f(x+y)f(x-y) \\ &= (f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt) \times \\ &\quad (f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x) + \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt) \\ &= (f(x))^2 + y^2(f(x)f''(x) - (f'(x))^2) \\ &\quad + (f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x)) \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &\quad + (f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x)) \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt (*) \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $y \in [-1, 1]$ ,  $(f^{(3)})$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  et donc continue sur le segment  $[-1, 1]$ ,

$$\left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \right| \leq |y| \cdot \frac{y^2}{2} \text{Max}\{|f^{(3)}(t)|, t \in [x-1, x+1]\},$$

et donc,

$$\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \right| \leq |y| \text{Max}\{|f^{(3)}(t)|, t \in [x-1, x+1]\}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand  $y$  tend vers 0. On en déduit que  $\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \right|$  tend vers 0 quand  $y$  tend vers 0. De même,  $\frac{1}{y^2} \left| \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \right|$  tend vers 0 quand  $y$  tend vers 0.

On simplifie alors  $(f(x)^2)$  dans les deux membres de (\*). On divise les deux nouveaux membres par  $y^2$  pour  $y \neq 0$  puis on fait tendre  $y$  vers 0 à  $x$  fixé. On obtient  $0 \geq f(x)f''(x) - (f'(x))^2$ , qui est l'inégalité demandée.

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1}{2} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{(\sqrt{x})^2/2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

$f$  est donc dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$ .

Autre solution.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux. Pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$ . Quand  $x$  tend vers 0,  $f'$  tend vers  $-\frac{1}{2}$ . En résumé,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et  $f'$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 0 à savoir 0. On en déduit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

Soit  $n \geq 2$  le degré de  $P$ .

1. Si  $P$  admet  $n$  racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins  $n - 1$  racines réelles deux à deux distinctes pour  $P'$ . Mais, puisque  $P'$  est de degré  $n - 1$ , ce sont toutes les racines de  $P'$ , nécessairement toutes réelles et simples.

(Le résultat tombe en défaut si les racines de  $P$  ne sont pas toutes réelles. Par exemple,  $P = X^3 - 1$  est à racines simples dans  $\mathbb{C}$  mais  $P' = 3X^2$  admet une racine double)

2. Séparons les racines simples et les racines multiples de  $P$ . Posons  $P = (X - a_1) \dots (X - a_k)(X - b_1)^{\alpha_1} \dots (X - b_l)^{\alpha_l}$  où les  $a_i$  et les  $b_j$  sont  $k + l$  nombres réels deux à deux distincts et les  $\alpha_j$  des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement  $k = 0$  ou  $l = 0$  et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

$P$  s'annule déjà en  $k + l$  nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit  $k + l - 1$  racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des  $a_i$  et des  $b_j$ . D'autre part, les  $b_j$  sont racines d'ordre  $\alpha_j$  de  $P$  et donc d'ordre  $\alpha_j - 1$  de  $P'$ . On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à  $k + l - 1 + \sum_{j=1}^l (\alpha_j - 1) = k + \sum_{j=1}^l \alpha_j - 1 = n - 1$  racines réelles et c'est fini.

### Correction de l'exercice 15 ▲

En pensant à l'expression développée de  $\Delta$ , on voit que  $\Delta$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et vérifie  $\Delta(a) = \Delta(b) (= 0)$  (un déterminant ayant deux colonnes identiques est nul).

Donc, d'après le théorème de ROLLE,  $\exists c \in ]a, b[ / \Delta'(c) = 0$ .

Mais, pour  $x \in ]a, b[$ ,  $\Delta'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$  (dérivée d'un déterminant). L'égalité  $\Delta'(c) = 0$  s'écrit :  $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$  ce qu'il fallait démontrer.

(Remarque. Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ( $g = Id$  « est » le théorème des accroissements finis.))

### Correction de l'exercice 16 ▲

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1$ ,  $\exists A > 0 / \forall x > 0$ ,  $(x \geq A \Rightarrow x f'(x) \geq \frac{1}{2})$ .

Soit  $x$  un réel fixé supérieur ou égal à  $A$ .  $\forall t \in [A, x]$ ,  $f'(t) \geq \frac{1}{2x}$  et donc, par croissance de l'intégrale,  $\int_A^x f'(t) dt \geq \int_A^x \frac{1}{2t} dt$  ce qui fournit :

$$\forall x \geq A, f(x) \geq f(A) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln A),$$

et montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

$$\forall x \in \mathbb{R} f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f(f \circ f(x)) = f \circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

Puisque  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on obtient en dérivant  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{1}{2}f'(x)$ , et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'(x).$$

Soit alors  $x$  un réel donné et  $u$  la suite définie par  $u_0 = x$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ .

D'après ce qui précède,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f'(x) = f'(u_n)$ . Maintenant,  $u$  est une suite arithmético-géométrique et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 6 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 6)$$

ce qui montre que la suite  $u$  converge vers 6. La suite  $(f'(u_n))_{n \geq 0}$  est constante, de valeur  $f'(x)$ .  $f'$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_n) = f'\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f'(6),$$

ce qui montre que la fonction  $f'$  est constante sur  $\mathbb{R}$  et donc que  $f$  est affine.

Réciproquement, pour  $x$  réel, posons  $f(x) = ax + b$ .

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(ax + b) + b = \frac{x}{2} + 3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (a^2 - \frac{1}{2})x + ab + b - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } (a + 1)b = 3 \Leftrightarrow (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2 - \sqrt{2})) \text{ ou } (a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2 + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

On trouve deux fonctions solutions, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2 - \sqrt{2}) \text{ et } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2 + \sqrt{2}).$$

### Correction de l'exercice 18 ▲

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Pour  $x$  réel, posons  $g(x) = e^x f(x)$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$ . Il s'agit donc maintenant de montrer que si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}g'(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}g(x) = 0$ .

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

$$\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^x \leq g'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}e^x).$$

Pour  $x$  réel donné supérieur ou égal à  $A$ , on obtient en intégrant sur  $[A, x]$  :

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A) = \int_A^x -\frac{\varepsilon}{2}e^t dt \leq \int_A^x g'(t) dt = g(x) - g(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$

et donc

$$\forall x \geq A, g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) \leq e^{-x}g(x) \leq g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}).$$

Maintenant,  $g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$  et  $g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x})$  tendent respectivement vers  $-\frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{\varepsilon}{2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Donc,

$$\exists B \geq A / \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ et } < g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) < \varepsilon).$$

Pour  $x \geq B$ , on a donc  $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$ .

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq B \Rightarrow |e^{-x}g(x)| < \varepsilon)$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}g(x) = 0$  ce qu'il fallait démontrer.

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. Pour  $x \geq -1$ , posons  $f(x) = \sqrt{1+x}$  et  $g(x) = f(x) - x$ .

Soit  $u_0 \in I = [-1, +\infty[$ .  $f$  est définie sur  $I$  et de plus  $f(I) = [0, +\infty[ \subset [-1, +\infty[$ . On en déduit, par une démonstration par récurrence, que la suite  $u$  est définie.

Si la suite  $u$  converge, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$ , sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell \geq -1$ . Puisque  $f$  est continue sur  $[-1, +\infty[$  et donc en  $\ell$ ,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell).$$

et  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . Or, pour  $x \geq -1$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} = x &\Leftrightarrow 1+x = x^2 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow (x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ et } x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, si la suite  $(u_n)$  converge, c'est vers le nombre  $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Pour  $x \geq -1$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(f(x) - \alpha) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\alpha}) = \operatorname{sgn}((1+x) - (1+\alpha)) \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[) \\ &= \operatorname{sgn}(x - \alpha). \end{aligned}$$

Ainsi, les intervalles  $[-1, \alpha[$  et  $]\alpha, +\infty[$  sont stables par  $f$ . Donc, si  $-1 \leq u_0 < \alpha$ , alors par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n < \alpha$  et si  $u_0 > \alpha$ , alors par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \alpha$ .

Soit  $x \geq -1$ . Si  $x \in [-1, 0]$ ,  $\sqrt{1+x} - x \geq 0$  et si  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(g(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - x) \\ &= \operatorname{sgn}((1+x) - x^2) \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[) \\ &= \operatorname{sgn}\left(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(-x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - x\right) = \operatorname{sgn}(\alpha - x) \quad (\text{car ici } x \geq 0). \end{aligned}$$

On en déduit que, si  $x \in [-1, \alpha[$ ,  $f(x) > x$ , et si  $x \in ]\alpha, +\infty[$ ,  $f(x) < x$ . Mais alors, si  $-1 \leq u_0 < \alpha$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n < \alpha$ , pour  $n$  entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

La suite  $u$  est donc strictement croissante, majorée par  $\alpha$  et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement  $\alpha$ .

Si  $u_0 > \alpha$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \alpha$ , pour  $n$  entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite  $u$  est donc strictement décroissante, minorée par  $\alpha$  et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement  $\alpha$ . Enfin, si  $u_0 = \alpha$ , la suite  $u$  est constante.

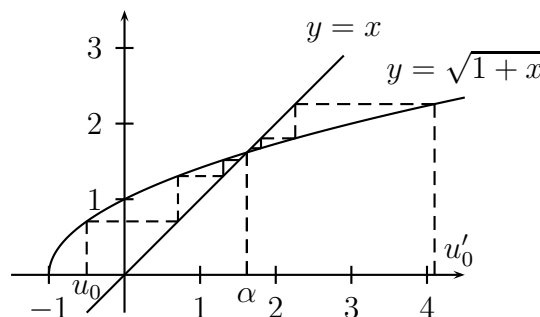
En résumé,

si  $u_0 \in [-1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$ , la suite  $u$  est strictement croissante, convergente de limite  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,

si  $u_0 \in ]\frac{\sqrt{5}+1}{2}, +\infty[$ , la suite  $u$  est strictement décroissante, convergente de limite  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,

si  $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , la suite  $u$  est constante et en particulier convergente de limite  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Ainsi, dans tous les cas, la suite  $u$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .



2. Si  $u_0 > 0$ , alors puisque  $f$  est définie sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$  et que  $I$  est stable par  $f$  ( $\forall x > 0$ ,  $\ln(1+x) > \ln 1 = 0$ ), la suite  $u$  est définie et est strictement positive. Si la suite  $u$  converge, sa limite  $\ell$  est un réel positif ou nul. Par continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  et donc en  $\ell$ ,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Pour  $x > -1$ , posons  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .  $g$  est définie et dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et pour  $x > -1$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

$g'$  est strictement positive sur  $] -1, 0[$  et strictement négative sur  $]0, +\infty[$ .  $g$  est donc strictement croissante sur  $] -1, 0[$  et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Par suite, si  $x \in ] -1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ . En particulier, pour  $x \in ] -1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \neq x$ . Puisque  $f(0) = 0$ ,  $f$  admet dans  $] -1, +\infty[$  un et un seul point fixe à savoir 0.

En résumé, si  $u_0 > 0$ , la suite  $u$  est définie, strictement positive, et de plus, si la suite  $u$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Mais, pour  $n$  entier naturel donné,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n < 0.$$

Par suite, la suite  $u$  est strictement décroissante, minorée par 0 et donc, d'après ce qui précède, converge vers 0.

Si  $u_0 = 0$ , la suite  $u$  est constante. Il reste donc à étudier le cas où  $u_0 \in ] -1, 0[$ . Montrons par l'absurde qu'il existe un rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0} \leq -1$ . Dans le cas contraire,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > -1$ . Comme précédemment, par récurrence, la suite  $u$  est à valeurs dans  $] -1, 0[$  et strictement décroissante. Etant minorée par  $-1$ , la suite  $u$  converge vers un certain réel  $\ell$ .

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 < u_n \leq u_0 < 0$ , on a  $-1 \leq \ell \leq u_0 < 0$ . Donc, ou bien  $\ell = -1$ , ou bien  $f$  est continue en  $\ell$  et  $\ell$  est un point fixe de  $f$  élément de  $] -1, 0[$ .

On a vu que  $f$  n'admet pas de point fixe dans  $] -1, 0[$  et donc ce dernier cas est exclu. Ensuite, si  $\ell = -1$ , il existe un rang  $N$  tel que  $u_N \leq -0.9$ . Mais alors,  $u_{N+1} = \ln(-0.9 + 1) = -2,3... < -1$  ce qui constitue de nouveau une contradiction.

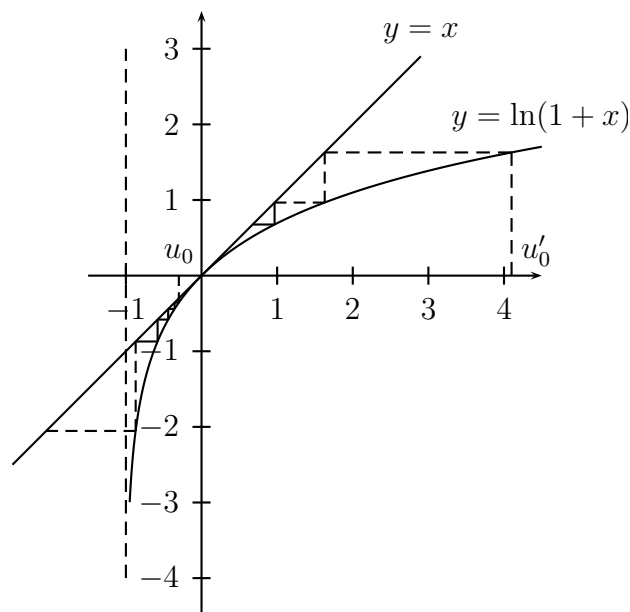
Donc, il existe un rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0} \leq -1$  et la suite  $u$  n'est pas définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

si  $u_0 \in ]0, +\infty[$ , la suite  $u$  est strictement décroissante, convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,

si  $u_0 = 0$ , la suite  $u$  est constante,

et si  $u_0 \in ] -1, 0[$ , la suite  $u$  n'est pas définie à partir d'un certain rang.



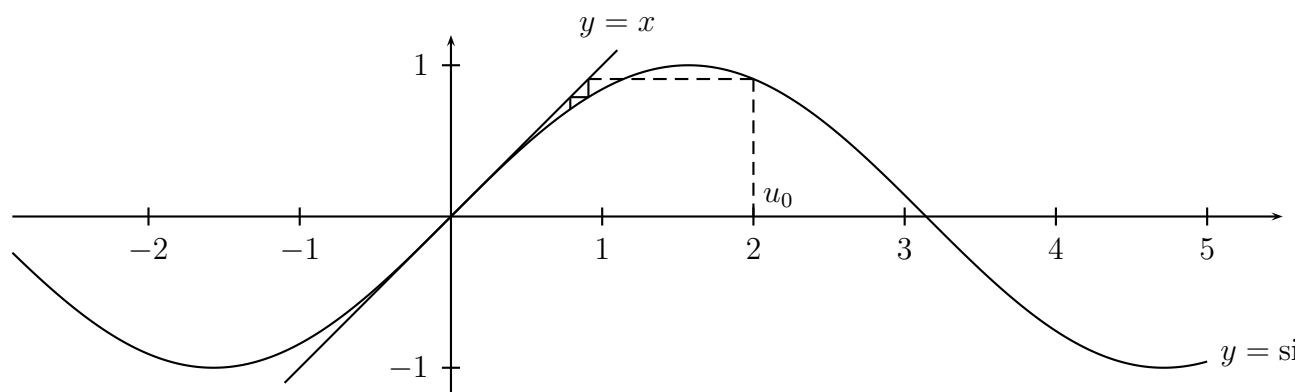
3. Pour tout choix de  $u_0, u_1 \in [-1, 1]$ . On supposera dorénavant que  $u_0 \in [-1, 1]$ . Si  $u_0 = 0$ , la suite  $u$  est constante. Si  $u_0 \in [-1, 0[$ , considérons la suite  $u'$  définie par  $u'_0 = -u_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u'_{n+1} = \sin(u'_n)$ . La fonction  $x \mapsto \sin x$ , il est clair par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u'_n = -u_n$ . On supposera dorénavant que  $u_0 \in ]0, 1]$ .

Puisque  $]0, 1] \subset ]0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin]0, 1] \subset ]0, 1]$  et l'intervalle  $I = ]0, 1]$  est stable par  $f$ . Ainsi, si  $u_0 \in ]0, 1]$ , alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, 1]$ .

Pour  $x \in ]0, 1]$ , posons  $g(x) = \sin x - x$ .  $g$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $g'(x) = \cos x - 1$ .  $g'$  est strictement négative sur  $]0, 1]$  et donc strictement décroissante sur  $]0, 1]$ . On en déduit que pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $g(x) < g(0) = 0$ .

Mais alors, pour  $n$  entier naturel donné,  $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$ . La suite  $u$  est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers  $\ell \in [0, 1]$ . La fonction  $x \mapsto \sin x$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc,  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . L'étude de  $g$  montre que  $f$  a un et un seul point fixe dans  $[0, 1]$  à savoir 0. La suite  $u$  est donc convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

L'étude préliminaire montre la suite  $u$  converge vers 0 pour tout choix de  $u_0$ .



4. Si  $u_0$  est un réel quelconque,  $u_1 \in [-1, 1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  puis  $u_2 \in [0, 1]$ . On supposera dorénavant que  $u_0 \in [0, 1]$ .

On a  $\cos([0, 1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0, 504\dots, 1] \subset [0, 1]$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \cos x$  laisse stable l'intervalle  $I = [0, 1]$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , on pose  $g(x) = \cos x - x$ .  $g$  est somme de deux fonctions strictement décroissantes sur  $[0, 1]$  et est donc strictement décroissante sur  $[0, 1]$ . De plus,  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et vérifie  $g(0) = \cos 0 > 0$  et  $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$ .  $g$  s'annule donc une et une seule fois sur  $[0, 1]$  en un certain réel  $\alpha$ . Ainsi,  $f$  admet sur  $[0, 1]$  un unique point fixe, à savoir  $\alpha$ . Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , on sait que si la suite  $u$  converge, c'est vers  $\alpha$ .

La fonction  $f : x \mapsto \cos x$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leq \sin 1 < 1.$$

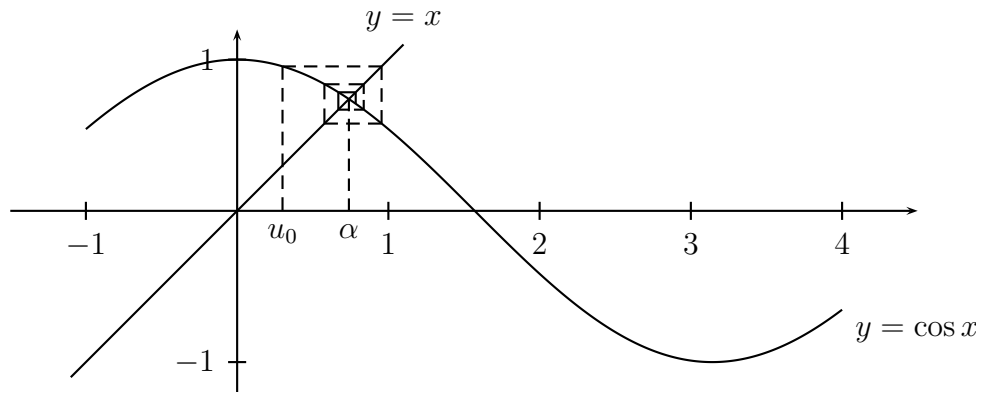
L'inégalité des accroissements finis montre alors que  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $|\cos x - \cos y| \leq \sin 1 |x - y|$ . Pour  $n$  entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \sin 1 |u_n - \alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Comme  $0 \leq \sin 1 < 1$ , la suite  $(\sin 1)^n$  converge vers 0, et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ . On peut noter que puisque la fonction  $x \mapsto \cos x$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ , les deux suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où  $u_0 \in [0, 1]$ ). On peut noter également que si  $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)} = 26,6\dots$ , alors  $(\sin 1)^n < 10^{-2}$ . Par suite,  $u_{27}$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près. La machine fournit  $\alpha = 0,73\dots$  (et même  $\alpha = 0,739087042\dots$ ).



5. Si  $u_0$  est un réel quelconque, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \in [-1, 1]$ . On supposera sans perte de généralité que  $u_0 \in [-1, 1]$ . Si  $u_0 = 0$ , la suite  $u$  est constante et d'autre part, l'étude du cas  $u_0 \in [-1, 0[$  se ramène, comme en 3), à l'étude du cas  $u_0 \in ]0, 1]$ . On supposera dorénavant que  $u_0 \in ]0, 1]$ .

Si  $x \in ]0, 1]$ , alors  $2x \in ]0, 2] \subset ]0, \pi[$  et donc  $\sin(2x) \in ]0, 1]$ . L'intervalle  $I = ]0, 1]$  est donc stable par la fonction  $f : x \mapsto \sin(2x)$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, 1]$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , posons  $g(x) = \sin(2x) - x$ .  $g$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et pour  $x \in [0, 1]$ ,  $g'(x) = 2 \cos(2x) - 1$ .  $g$  est donc strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et strictement décroissante sur  $[\frac{\pi}{4}, 1]$ . On en déduit que si  $x \in ]0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $g(x) > g(0) = 0$ . D'autre part,  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[\frac{\pi}{4}, 1]$  et vérifie  $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$  et  $g(1) = \sin 2 - 1 < 0$ .  $g$  s'annule donc une et une seule fois en un certain réel  $\alpha \in ]\frac{\pi}{4}, 1[$ .

En résumé,  $g$  s'annule une et une seule fois sur  $]0, 1]$  en un certain réel  $\alpha \in ]\frac{\pi}{4}, 1[$ ,  $g$  est strictement positive sur  $]0, \alpha[$  et strictement négative sur  $]\alpha, 1]$ .

Supposons que  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  et montrons par l'absurde que  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ . Dans le cas contraire, tous les  $u_n$  sont dans  $]0, \frac{\pi}{4}[$ . Mais alors, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

La suite  $u$  est donc strictement croissante. Etant majorée par  $\frac{\pi}{4}$ , la suite  $u$  converge. Comme  $g$  est continue sur  $[u_0, \frac{\pi}{4}]$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [u_0, \frac{\pi}{4}]$ , on sait que la limite de  $u$  est un point fixe de  $f$  élément de  $[u_0, \frac{\pi}{4}]$ . Mais l'étude de  $g$  a montré que  $f$  n'admet pas de point fixe dans cet intervalle ( $u_0$  étant strictement positif). On aboutit à une contradiction.

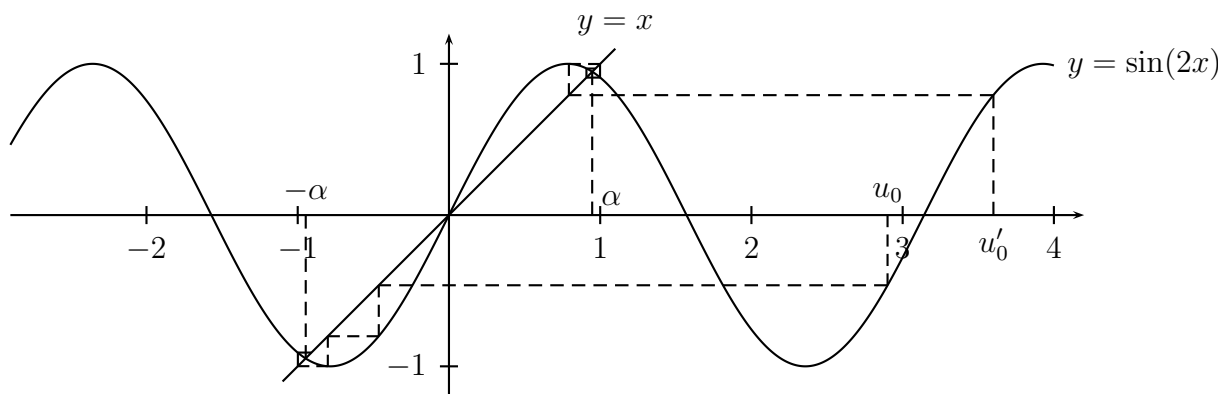
Donc, ou bien  $u_0 \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ , ou bien  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  et dans ce cas,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ . Dans tous les cas,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ . Mais alors, puisque  $f([\frac{\pi}{4}, 1]) = [\sin 2, \sin \frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{4}, 1]$  (car  $\sin 2 = 0,909\dots > 0,785\dots = \frac{\pi}{4}$ ), pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ .

Pour  $x \in [\frac{\pi}{4}, 1]$ ,  $|g'(x)| = |2 \cos(2x)| \leq |2 \cos 2|$ . L'inégalité des accroissements finis montre alors que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq |2 \cos 2| \cdot |u_n - \alpha|$ , puis que

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \alpha| \leq |2 \cos 2|^{n-n_0} |u_{n_0} - \alpha|.$$

Comme  $|2 \cos 2| = 0,83\dots < 1$ , on en déduit que la suite  $u$  converge vers  $\alpha$ . La machine donne par ailleurs  $\alpha = 0,947\dots$





6. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite  $u$  converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad (I)$$

$$u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad (II)$$

$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad (III).$$

**1er cas.** Si  $u_0 = 1$  ou  $u_0 = 2$ , la suite  $u$  est constante.

**2ème cas.** Si  $u_0 \in ]1, 2[$ , (II) et (III) permettent de montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]1, 2[$ . (I) montre alors que la suite  $u$  est strictement décroissante. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel  $\ell \in [1, u_0] \subset [1, 2[$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

**3ème cas.** Si  $u_0 \in ]2, +\infty[$ , (III) permet de montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2$ . Mais alors, (I) montre que la suite  $u$  est strictement croissante. Si  $u$  converge, c'est vers un réel  $\ell \in [u_0, +\infty[ \subset ]2, +\infty[$ .  $f$  n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite  $u$  diverge et,  $u$  étant strictement croissante, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**4ème cas.** Si  $u_0 \in ]0, 1[$ , alors  $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in ]1, 2[$  ce qui ramène au deuxième cas. La suite  $u$  converge vers 1.

**5ème cas.** Si  $u_0 = 0$ , alors  $u_1 = 2$  et la suite  $u$  est constante à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite  $u$  converge vers 2.

**6ème cas.** Si  $u_0 < 0$ , alors  $u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 > 2$ , ce qui ramène au troisième cas. La suite  $u$  tend vers  $+\infty$ .

En résumé, si  $u_0 \in ]0, 2[$ , la suite  $u$  converge vers 1, si  $u_0 \in \{0, 2\}$ , la suite  $u$  converge vers 2 et si  $u_0 \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$ , la suite  $u$  tend vers  $+\infty$ .

