Continuité (étude globale). Diverses fonctions

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $f(x) = d(x,A) = \text{Inf}\{|y-x|,\ y \in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.

Correction ▼ [005392]

Exercice 2 **I

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005393]

Exercice 3 **I

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell \in [0,1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005394]

Exercice 4 ***

Soit f croissante de $[a,b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005395]

Exercice 5 ****

Soit f croissante sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005396]

Exercice 6 ***

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante.

Correction ▼ [005397]

Exercice 7 ***IT

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [005398]

Exercice 8 ***I

Trouver tous les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$.

Correction ▼ [005399]

Exercice 9 ***

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\bigcup_{k\geqslant 1}]ka, kb[$ contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ puis déterminer la plus petite valeur possible de A.

Correction ▼ [005400]

Exercice 10 ***

Soit f périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005401]

Exercice 11 *** Théorème d'homéomorphie

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone et que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

Correction ▼ [005402]

Exercice 12 ***

Trouver un exemple de fonction pèriodique dont le groupe des pèriodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005403]

Exercice 13 **

Soit f de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\forall (x,y) \in ([0,1])^2,\ |f(y) - f(x)| \geqslant |x - y|$. Montrer que $f = Id$ ou $f = 1 - Id$.

Correction ▼ [005404]

Exercice 14 ***

Trouver les fonctions bijectives de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0,1],\ f(2x - f(x)) = x$.

Correction ▼ [005405]

Exercice 15 ***I

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = \frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x+a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0,1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x+a) = f(x)$ n'ait pas de solution.
3. Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
   (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

Correction ▼ [005406]

Correction de l'exercice 1 ▲

Voir la correction de l'exercice **??**.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a,b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0,1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geqslant A$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\ell+1}{2} < 1$. Mais alors, $f(A) < A$ (et $f(0) \geqslant 0$) ce qui ramène à la situation de l'exercice 2 : pour $x \in [0,A]$, soit $g(x) = f(x) - x$...

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $E = \{x \in [a,b] / \ f(x) \geqslant x\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supèrieure c vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$.
Montrons que $f(c) = c$.
Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / \ b - \frac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Puisque f est à valeurs dans $[a,b]$ et que les x_n sont dans E, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$x_n \leqslant f(x_n) \leqslant b \ (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a,b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-) \leqslant f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leqslant f(b^-) \leqslant f(b) \leqslant b$ et donc $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f.
Si $c \in [a,b[$, par définition de c, pour x dans $]c,b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c)(\leqslant f(c+)) \leqslant c$.
D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / \ c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c$. x_n étant dans E, on a $f(x_n) \geqslant x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geqslant f(c^-) \geqslant c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque f est croissante sur $[a,b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a), +\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $]-\infty, f(b)]$.
Si f est discontinue en un x_0 de $]a,b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a, x_0[\ (\neq \emptyset)$, $f(x) \leqslant f(x_0-)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
Donc $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a,b]) = \emptyset$ ce qui est exclu puisque d'autre part $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \emptyset$ et $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a,b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x > 0$. Pour tout naturel n, $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = ... = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim_{n \to +\infty} x^{1/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0, \ f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0, +\infty[$, puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0.
Pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geqslant 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. f vérifie donc : $\forall x \geqslant 0, \ f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Posons $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $(x,y) \in [A,+\infty[^2$. Alors, $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc, $\exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,A]^2,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$.
Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0,+\infty[$ vérifiant $|x-y| < \alpha$.
Si $(x,y) \in [0,A]^2$, on a $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Si $(x,y) \in [A,+\infty[^2$, on a $|f(x)-f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Si enfin on a $x \leqslant A \leqslant y$, alors, puisque $|A-x| \leqslant |x-y| < \alpha$, on a $|f(x)-f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A,+\infty[$, on a $|f(y)-f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(A)| + |f(y)-f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit f un morphisme de $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y).$$

On sait déjà $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ et donc $f(0) = 0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x)+f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = f(x)+\ldots+f(x) = nf(x)$. De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x).$$

Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(n.1) = nf(1) = an$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $nf(\frac{1}{n}) = f(n\frac{1}{n}) = f(1) = a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{n}) = a\frac{1}{n}$.
Puis, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa\frac{1}{q} = a\frac{p}{q}$.
Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
Soit x un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x.
f étant continue en x, on a :

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} r_n) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si f est un morphisme continu de $(\mathbb{R},+)$, f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient a et b deux réels fixés tels que $0 < a < b$. Trouvons les entiers naturels non nuls k tels que $]ka,kb[\cap](k+1)a,(k+1)b[\neq \emptyset$. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, posons $I_k =]ka,kb[$.

$$I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow ka < (k+1)a < kb < (k+1)b \Leftrightarrow k > \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow k \geqslant E(\frac{a}{b-a})+1.$$

Posons $k_0 = E(\frac{a}{b-a})+1$. Pour $k \geqslant k_0$, on a donc $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ et donc $\bigcup_{k\geqslant k_0}]ka,kb[=]k_0a,+\infty[$.

Maintenant, si $k_0 = 1$, $\bigcup_{k \geqslant k_0}]ka, kb[=]a, +\infty[$ et si $k_0 > 1$, $\bigcup_{k \geqslant k_0}]ka, kb[= (\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[) \cup]k_0 a, +\infty[$. Mais, si x est dans $\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[$, alors $x < (k_0 - 1)b < k_0 a$ et donc, $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[) \cap]k_0 a, +\infty[= \emptyset$. La plus petite valeur de A est donc $(E(\frac{a}{b-a}) + 1)a$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit T une période strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc est bornée sur ce segment. f est par suite bornée sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité.

Soit $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc, d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in]0, T[/ \ \forall (x, y) \in [0, T], \ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient x et y deux réels tels que $|x - y| < \alpha$. Si il existe un entier naturel k tel que $(x, y) \in [kT, (k+1)T]$, alors $x - kT \in [0, T]$, $y - kT \in [0, T]$, puis $|(x - kT) - (y - kT)| = |y - x| < \alpha$ et donc $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Sinon, en supposant par exemple que $x \leqslant y$, puisque l'on a choisi $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}/ \ (k - 1)T \leqslant x \leqslant kT \leqslant y \leqslant (k + 1)T.$$

Mais alors, $|x - kT| = |y - x| < \alpha$ et $|y - kT| \leqslant |y - x| < \alpha$. Par suite,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(kT)| + |f(y) - f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x - y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0/ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Si f est strictement monotone sur I, on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f injective et continue sur I et montrons que f est strictement monotone.

Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels a, b et c dans l'intervalle I tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geqslant f(a) \text{ et } f(b) \geqslant f(c)) \text{ ou } (f(b) \leqslant f(a) \text{ et } f(b) \leqslant f(c))).$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $a < b < c$ et $f(b) \geqslant f(a)$ et $f(b) \geqslant f(c)$.

Puisque f est injective, on a même $a < b < c$ et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Soit $M = \text{Max}\{f(a), f(c)\}$. On a $M < f(b)$. M est élément de $[f(a), f(b)]$ et, puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$. De plus, on ne peut avoir $\alpha = b$ car $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (et f injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a, b[/ \ f(\alpha) = M.$$

De même, puisque M est élément de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b, c]/ \ f(\beta) = M$. Ainsi, on a trouvé dans I deux réels α et β vérifiant $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ ce qui contredit l'injectivité de f.

Donc, f est strictement monotone sur I.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit f la fonction caractéristique de Q. Le groupe des périodes de f est $\mathbb{Q}$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ x+r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(x+r) = f(x)$. Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ x+r \in \mathbb{Q}, \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ f(x+r) \neq f(x)$.

Correction de l'exercice 13 ▲

On a $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$. Donc $|f(1)-f(0)| \leqslant 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1)-f(0)| \geqslant 1$. Par suite, $|f(1)-f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) \in \{(0,1),(1,0)\}$.
Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$.
Soit $x \in [0,1]$. On a $|f(x)-f(0)| \geqslant |x-0|$ ce qui fournit $f(x) \geqslant x$. On a aussi $|f(x)-f(1)| = |x-1|$ ce qui fournit $1-f(x) \geqslant 1-x$ et donc $f(x) \leqslant x$. Finalement, $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$ et $f = Id$.
Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = 1-f(x)$. Alors, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$. Enfin,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |g(y)-g(x)| = |f(y)-f(x)| \geqslant |y-x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g = Id$ et donc $f = 1-Id$. Réciproquement, Id et $1-Id$ sont bien bien solutions du problème.

Correction de l'exercice 14 ▲

Id est solution.
Réciproquement, soit f une bijection de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0,1],\ f(2x-f(x)) = x$. Nécessairement, $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant 2x-f(x) \leqslant 1$ et donc $\forall x \in [0,1],\ 2x-1 \leqslant f(x) \leqslant 2x$.
Soit f^{-1} la réciproque de f.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ f(2x-f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ 2x-f(x) = f^{-1}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0,1],\ f(f(y))-2f(y)+y = 0 \text{ (car } \forall x \in [0,1],\ \exists! y\ [0,1]/\ x = f(y))\end{aligned}$$

Soit $y \in [0,1]$ et $u_0 = y$. En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0,1]$ (car $[0,1]$ est stable par f). La condition $\forall y \in [0,1],\ f(f(y))-2f(y)+y = 0$ fournit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = 0$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1} = u_{n+1}-u_n$. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.
En particulier, $u_1 = u_0$ ce qui fournit $f(y) = y$. On a montré que $\forall y \in [0,1],\ f(y) = y$ et donc $f = Id$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $[0, 1-\frac{1}{n}]$, posons $g(x) = f(x+\frac{1}{n})-f(x)$. g est définie et continue sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})) = f(1)-f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $\{0,\dots,n-1\}$ tel que $g(\frac{k}{n}) = 0$, on a trouvé un réel x de $[0,1]$ tel que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ (à savoir $x = \frac{k}{n}$).
Sinon, tous les $g(\frac{k}{n})$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$, le théorème des valeurs intermédiares permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

2. Soit $a \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Soit, pour $x \in [0,1]$, $f(x) = |\sin \frac{\pi x}{a}| - x|\sin \frac{\pi}{a}|$. f est continue sur $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ mais,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x) = (|\sin \frac{\pi(x+a)}{a}| - |\sin \frac{\pi x}{a}|) - ((x+a)-x)|\sin \frac{\pi}{a}| = -a|\sin \frac{\pi}{a}| \neq 0.$$

3. (a) et b)) Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis, pour $t \in [0,1]$, $f(t) = g(t) - 20t$. f est continue sur $[0,1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérife $f(0) = f(1) = 0$.
   D'après 1), $\exists t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, $\exists t_2 \in [0, \frac{19}{20}]$ tels que $f(t_1 + \frac{1}{2}) = f(t_1)$ et $f(t_2 + \frac{1}{20}) = f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g(t_1 + \frac{1}{2}) - g(t_1) = 10$ et $g(t_2 + \frac{1}{20}) - g(t_2) = 1$.
   c) Posons pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et donc, $g(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t \in [0, \frac{1}{4}]$, $f(t + \frac{3}{4}) - f(t) \neq 0$ ou encore $g(t + \frac{3}{4}) - g(t) \neq 15$.