



## Continuité (étude globale). Diverses fonctions

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*I

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = d(x, A) = \inf\{|y - x|, y \in A\}$ . Montrer que  $f$  est Lipschitzienne.

[Correction ▼](#)

[005392]

### Exercice 2 \*\*I

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $[a, b]$ . Montrer que  $f$  a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005393]

### Exercice 3 \*\*I

Soit  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , continue sur  $[0, +\infty[$  telle que  $\frac{f(x)}{x}$  a une limite réelle  $\ell \in [0, 1[$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $f$  a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005394]

### Exercice 4 \*\*\*

Soit  $f$  croissante de  $[a, b]$  dans lui-même. Montrer que  $f$  a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005395]

### Exercice 5 \*\*\*\*

Soit  $f$  croissante sur  $[a, b]$  telle que  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

[Correction ▼](#)

[005396]

### Exercice 6 \*\*\*

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}^+$  telle que, pour tout réel positif  $x$ , on ait  $f(x^2) = f(x)$ . Montrer que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}^+$ . Trouver un exemple où  $f$  n'est pas constante.

[Correction ▼](#)

[005397]

### Exercice 7 \*\*\*IT

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  admettant une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

[Correction ▼](#)

[005398]

### Exercice 8 \*\*\*I

Trouver tous les morphismes continus de  $(\mathbb{R}, +)$ .

[Correction ▼](#)

[005399]

### Exercice 9 \*\*\*

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Montrer que  $\bigcup_{k \geq 1} ]ka, kb[$  contient un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  puis déterminer la plus petite valeur possible de  $A$ .

[Correction ▼](#)

[005400]

---

**Exercice 10 \*\*\***

Soit  $f$  périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005401]

---

**Exercice 11 \*\*\* Théorème d'homéomorphie**

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone et que dans ce cas  $f(I)$  est un intervalle de même nature que  $I$  (ouvert, semi-ouvert, fermé).

[Correction ▼](#)

[005402]

---

**Exercice 12 \*\*\***

Trouver un exemple de fonction périodique dont le groupe des périodes est dense dans  $\mathbb{R}$  mais pas  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005403]

---

**Exercice 13 \*\***

Soit  $f$  de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que  $\forall (x, y) \in ([0, 1])^2, |f(y) - f(x)| \geq |x - y|$ . Montrer que  $f = Id$  ou  $f = 1 - Id$ .

[Correction ▼](#)

[005404]

---

**Exercice 14 \*\*\***

Trouver les fonctions bijectives de  $[0, 1]$  sur lui-même vérifiant  $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$ .

[Correction ▼](#)

[005405]

---

**Exercice 15 \*\*\*I**

Soit  $f$  une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , continue sur  $[0, 1]$  et vérifiant  $f(0) = f(1)$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $a = \frac{1}{n}$ . Montrer que l'équation  $f(x+a) = f(x)$  admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si  $a$  est un réel de  $]0, 1[$  qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation  $f(x+a) = f(x)$  n'ait pas de solution.
3. Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
  - (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
  - (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
  - (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

[Correction ▼](#)

[005406]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Voir la correction de l'exercice ??.

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

Pour  $x \in [a, b]$ , posons  $g(x) = f(x) - x$ .  $g$  est continue sur  $[a, b]$  puisque  $f$  l'est. De plus,  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $g$  s'annule au moins une fois sur  $[a, b]$  ou encore, l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque  $\frac{f(x)}{x}$  tend vers  $\ell \in [0, 1[$ , il existe  $A > 0$  tel que pour  $x \geq A$ ,  $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$ . Mais alors,  $f(A) < A$  (et  $f(0) \geq 0$ ) ce qui ramène à la situation de l'exercice 2 : pour  $x \in [0, A]$ , soit  $g(x) = f(x) - x$ ...

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $E = \{x \in [a, b] / f(x) \geq x\}$ .  $E$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  (car  $a$  est dans  $E$ ) et majorée (par  $b$ ). Donc,  $E$  admet une borne supérieure  $c$  vérifiant  $a \leq c \leq b$ .

Montrons que  $f(c) = c$ .

Si  $c = b$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x_n \in E / b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$ . Puisque  $f$  est à valeurs dans  $[a, b]$  et que les  $x_n$  sont dans  $E$ , pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$x_n \leq f(x_n) \leq b (*).$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(x_n)$  tend vers  $b$  (théorème des gendarmes) et donc,  $f$  étant croissante sur  $[a, b]$ , la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $f(b^-) \leq f(b)$ . Par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans  $(*)$ , on obtient alors  $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$  et donc  $f(b) = b$ . Finalement, dans ce cas,  $b$  est un point fixe de  $f$ .

Si  $c \in [a, b[$ , par définition de  $c$ , pour  $x$  dans  $]c, b]$ ,  $f(x) < x$  (car  $x$  n'est pas dans  $E$ ) et par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $c$  par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient :  $f(c) (\leq f(c+)) \leq c$ .

D'autre part,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x_n \in E / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$ .  $x_n$  étant dans  $E$ , on a  $f(x_n) \geq x_n$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :  $f(c) \geq f(c^-) \geq c$ . Finalement,  $f(c) = c$  et dans tous les cas,  $f$  admet au moins un point fixe.

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , on sait que  $f$  admet en tout point  $x_0$  de  $]a, b[$  une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant  $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$  puis une limite à droite en  $a$  élément de  $]f(a), +\infty[$  et une limite à gauche en  $b$  élément de  $] -\infty, f(b)[$ .

Si  $f$  est discontinue en un  $x_0$  de  $]a, b[$ , alors on a  $f(x_0^-) < f(x_0)$  ou  $f(x_0) < f(x_0^+)$ . Mais, si par exemple  $f(x_0^-) < f(x_0)$  alors,  $\forall x \in [a, x_0[ (\neq \emptyset)$ ,  $f(x) \leq f(x_0^-)$  et  $\forall x \in [x_0, b]$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Donc  $]f(x_0^-), f(x_0)[ \cap f([a, b]) = \emptyset$  ce qui est exclu puisque d'autre part  $]f(x_0^-), f(x_0)[ \neq \emptyset$  et  $]f(x_0^-), f(x_0)[ \subset ]f(a), f(b)[$  (la démarche est identique si  $f(x_0^+) > f(x_0)$ ). Donc,  $f$  est continue sur  $]a, b[$ . Par une démarche analogue,  $f$  est aussi continue en  $a$  ou  $b$  et donc sur  $[a, b]$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $x > 0$ . Pour tout naturel  $n$ ,  $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = \dots = f(x^{1/2^n})$ . Or, à  $x$  fixé,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1/2^n} = 1$  et,  $f$  étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

$f$  est donc constante sur  $]0, +\infty[$ , puis sur  $[0, +\infty[$  par continuité de  $f$  en 0.

Pour  $x \geq 0$ , posons  $f(x) = 0$  si  $x \neq 1$  et  $f(x) = 1$  si  $x = 1$ . Pour  $x \geq 0$ , on a  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ .  $f$  vérifie donc :  $\forall x \geq 0$ ,  $f(x^2) = f(x)$ , mais  $f$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}^+$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Posons  $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^+, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3})$ .

Soit  $(x, y) \in [A, +\infty[^2$ . Alors,  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$ . D'autre part,  $f$  est continue sur le segment  $[0, A]$  et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc,  $\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, A]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$ .

Résumons.  $\alpha > 0$  étant ainsi fourni, soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $[0, +\infty[$  vérifiant  $|x - y| < \alpha$ .

Si  $(x, y) \in [0, A]^2$ , on a  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ .

Si  $(x, y) \in [A, +\infty[^2$ , on a  $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ .

Si enfin on a  $x \leq A \leq y$ , alors, puisque  $|A - x| \leq |x - y| < \alpha$ , on a  $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$  et puisque  $A$  et  $y$  sont dans  $[A, +\infty[$ , on a  $|f(y) - f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$ . Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ .  $f$  est donc uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soit  $f$  un morphisme de  $(\mathbb{R}, +)$ , c'est-à-dire que  $f$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On sait déjà  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  et donc  $f(0) = 0$ . Puis, pour  $x$  réel donné,  $f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0$  et donc, pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = -f(x)$  ( $f$  est donc impaire). On a aussi  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(nx) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$ . De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x).$$

Soit  $a = f(1)$ . D'après ce qui précède,  $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1) = an$ .

Puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $nf(\frac{1}{n}) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(1) = a$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = a \frac{1}{n}$ .

Puis, pour  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa \frac{1}{q} = a \frac{p}{q}$ .

Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x$  un réel. Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de rationnels, convergente de limite  $x$ .  $f$  étant continue en  $x$ , on a :

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si  $f$  est un morphisme continu de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

Soient  $a$  et  $b$  deux réels fixés tels que  $0 < a < b$ . Trouvons les entiers naturels non nuls  $k$  tels que  $]ka, kb[ \cap ](k+1)a, (k+1)b[ \neq \emptyset$ . Pour  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , posons  $I_k = ]ka, kb[$ .

$$I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow ka < (k+1)a < kb < (k+1)b \Leftrightarrow k > \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow k \geq E\left(\frac{a}{b-a}\right) + 1.$$

Posons  $k_0 = E\left(\frac{a}{b-a}\right) + 1$ . Pour  $k \geq k_0$ , on a donc  $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$  et donc  $\bigcup_{k \geq k_0} ]ka, kb[ = ]k_0 a, +\infty[$ .

Maintenant, si  $k_0 = 1$ ,  $\bigcup_{k \geq k_0} ]ka, kb[ = ]a, +\infty[$  et si  $k_0 > 1$ ,  $\bigcup_{k \geq k_0} ]ka, kb[ = (\bigcup_{k=1}^{k_0-1} ]ka, kb[) \cup ]k_0a, +\infty[$ . Mais, si  $x$  est dans  $\bigcup_{k=1}^{k_0-1} ]ka, kb[$ , alors  $x < (k_0 - 1)b < k_0a$  et donc,  $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1} ]ka, kb[) \cap ]k_0a, +\infty[ = \emptyset$ . La plus petite valeur de  $A$  est donc  $(E(\frac{a}{b-a}) + 1)a$ .

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $T$  une période strictement positive de  $f$ .  $f$  est continue sur le segment  $[0, T]$  et donc est bornée sur ce segment.  $f$  est par suite bornée sur  $\mathbb{R}$  par  $T$ -périodicité.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

$f$  est continue sur le segment  $[0, T]$  et donc, d'après le théorème de HEINE,  $f$  est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in ]0, T[ / \forall (x, y) \in [0, T], (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $|x - y| < \alpha$ . Si il existe un entier naturel  $k$  tel que  $(x, y) \in [kT, (k+1)T]$ , alors  $x - kT \in [0, T]$ ,  $y - kT \in [0, T]$ , puis  $|(x - kT) - (y - kT)| = |y - x| < \alpha$  et donc  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Sinon, en supposant par exemple que  $x \leq y$ , puisque l'on a choisi  $\alpha < T$ ,

$$\exists k \in \mathbb{Z} / (k-1)T \leq x \leq kT \leq y \leq (k+1)T.$$

Mais alors,  $|x - kT| = |y - x| < \alpha$  et  $|y - kT| \leq |y - x| < \alpha$ . Par suite,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(kT)| + |f(y) - f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si  $|x - y| < \alpha$ , alors  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

$f$  est donc uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , on sait que  $f$  est injective.

Réciproquement, supposons  $f$  injective et continue sur  $I$  et montrons que  $f$  est strictement monotone.

Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels  $a, b$  et  $c$  dans l'intervalle  $I$  tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geq f(a) \text{ et } f(b) \geq f(c)) \text{ ou } (f(b) \leq f(a) \text{ et } f(b) \leq f(c))).$$

Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on supposera que  $a < b < c$  et  $f(b) \geq f(a)$  et  $f(b) \geq f(c)$ .

Puisque  $f$  est injective, on a même  $a < b < c$  et  $f(b) > f(a)$  et  $f(b) > f(c)$ . Soit  $M = \text{Max}\{f(a), f(c)\}$ . On a  $M < f(b)$ .  $M$  est élément de  $[f(a), f(b)]$  et, puisque  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $f(\alpha) = M$ . De plus, on ne peut avoir  $\alpha = b$  car  $f(\alpha) = M \neq f(b)$  (et  $f$  injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a, b[ / f(\alpha) = M.$$

De même, puisque  $M$  est élément de  $[f(c), f(b)]$ ,  $\exists \beta \in ]b, c] / f(\beta) = M$ . Ainsi, on a trouvé dans  $I$  deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $\alpha \neq \beta$  et  $f(\alpha) = f(\beta)$  ce qui contredit l'injectivité de  $f$ .

Donc,  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

Soit  $f$  la fonction caractéristique de  $Q$ . Le groupe des périodes de  $f$  est  $Q$ . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, x+r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, f(x+r) = f(x)$ . Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), x+r \in \mathbb{Q}, \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), f(x+r) \neq f(x)$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

On a  $0 \leq f(0) \leq 1$  et  $0 \leq f(1) \leq 1$ . Donc  $|f(1) - f(0)| \leq 1$ . Mais, par hypothèse,  $|f(1) - f(0)| \geq 1$ . Par suite,  $|f(1) - f(0)| = 1$  et nécessairement,  $(f(0), f(1)) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

Supposons que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  et montrons que  $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . On a  $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$  ce qui fournit  $f(x) \geq x$ . On a aussi  $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$  ce qui fournit  $1 - f(x) \geq 1 - x$  et donc  $f(x) \leq x$ . Finalement,  $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$  et  $f = Id$ .

Si  $f(0) = 1$  et  $f(1) = 0$ , posons pour  $x \in [0, 1], g(x) = 1 - f(x)$ . Alors,  $g(0) = 0, g(1) = 1$  puis, pour  $x \in [0, 1], g(x) \in [0, 1]$ . Enfin,

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \geq |y - x|.$$

D'après l'étude du premier cas,  $g = Id$  et donc  $f = 1 - Id$ . Réciproquement,  $Id$  et  $1 - Id$  sont bien solutions du problème.

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

$Id$  est solution.

Réciproquement, soit  $f$  une bijection de  $[0, 1]$  sur lui-même vérifiant  $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$ . Nécessairement,  $\forall x \in [0, 1], 0 \leq 2x - f(x) \leq 1$  et donc  $\forall x \in [0, 1], 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x$ .

Soit  $f^{-1}$  la réciproque de  $f$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], 2x - f(x) = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0 \text{ (car } \forall x \in [0, 1], \exists ! y \in [0, 1] / x = f(y)) \end{aligned}$$

Soit  $y \in [0, 1]$  et  $u_0 = y$ . En posant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , on définit une suite de réels de  $[0, 1]$  (car  $[0, 1]$  est stable par  $f$ ). La condition  $\forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0$  fournit  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ , ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ . La suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante ou encore  $u$  est arithmétique. Mais,  $u$  est également bornée et donc  $u$  est constante.

En particulier,  $u_1 = u_0$  ce qui fournit  $f(y) = y$ . On a montré que  $\forall y \in [0, 1], f(y) = y$  et donc  $f = Id$ .

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul donné. Pour  $x$  élément de  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ , posons  $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ .  $g$  est définie et continue sur  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ . De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier  $k$  élément de  $\{0, \dots, n-1\}$  tel que  $g(\frac{k}{n}) = 0$ , on a trouvé un réel  $x$  de  $[0, 1]$  tel que  $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$  (à savoir  $x = \frac{k}{n}$ ).

Sinon, tous les  $g(\frac{k}{n})$  sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels  $g$  prend des valeurs de signes contraires. Puisque  $g$  est continue sur  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ , le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que  $g$  s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation  $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ .

2. Soit  $a \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$ . Soit, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = |\sin \frac{\pi x}{a}| - x |\sin \frac{\pi}{a}|$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $f(0) = f(1) = 0$  mais,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x) = (|\sin \frac{\pi(x+a)}{a}| - |\sin \frac{\pi x}{a}|) - ((x+a) - x) |\sin \frac{\pi}{a}| = -a |\sin \frac{\pi}{a}| \neq 0.$$

3. (a) et b)) Soit  $g(t)$  la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant  $t$  exprimé en heures,  $0 \leq t \leq 1$ , puis, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = g(t) - 20t$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérifie  $f(0) = f(1) = 0$ .

D'après 1),  $\exists t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\exists t_2 \in [0, \frac{19}{20}]$  tels que  $f(t_1 + \frac{1}{2}) = f(t_1)$  et  $f(t_2 + \frac{1}{20}) = f(t_2)$  ce qui s'écrit encore  $g(t_1 + \frac{1}{2}) - g(t_1) = 10$  et  $g(t_2 + \frac{1}{20}) - g(t_2) = 1$ .

c) Posons pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $f(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$  et donc,  $g(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$ .  $\forall t \in [0, \frac{1}{4}]$ ,  $f(t + \frac{3}{4}) - f(t) \neq 0$  ou encore  $g(t + \frac{3}{4}) - g(t) \neq 15$ .

---