



## Limites. Continuité en un point

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*I

Soit  $f$  une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de  $+\infty$ . On suppose que la fonction  $f(x+1) - f(x)$  admet dans  $\mathbb{R}$  une limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Etudier l'existence et la valeur éventuelle de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

[Correction ▼](#)

[005382]

### Exercice 2 \*\*\*

Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . (Indication. Considérer  $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ .)

[Correction ▼](#)

[005383]

### Exercice 3 \*\*I

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\text{Min}\{f, g\}$  et  $\text{Max}\{f, g\}$  sont continues en  $x_0$ .

[Correction ▼](#)

[005384]

### Exercice 4 \*\*\*I Distance d'un point à une partie

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \text{Inf}\{|y - x|, y \in A\}$ . Montrer que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005385]

### Exercice 5 \*\*T

Montrer en revenant à la définition que  $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

[Correction ▼](#)

[005386]

### Exercice 6 \*\*IT

Montrer que la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  est discontinue en chacun de ses points.

[Correction ▼](#)

[005387]

### Exercice 7 \*\*\*\*

Etudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 0$  si  $x$  est irrationnel et  $f(x) = \frac{1}{p+q}$  si  $x$  est rationnel égal à  $\frac{p}{q}$ , la fraction  $\frac{p}{q}$  étant irréductible.

[Correction ▼](#)

[005388]

### Exercice 8 \*\*IT

Etudier en chaque point de  $\mathbb{R}$  l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et 1 si  $x = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005389]

**Exercice 9 \*\***

---

Trouver  $f$  bijective de  $[0, 1]$  sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

[Correction ▼](#)

[005390]

---

**Exercice 10 \*\*\***

---

Soit  $f$  une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , admettant une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

[Correction ▼](#)

[005391]

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

Il existe  $a > 0$  tel que  $f$  est définie et continue sur  $[a, +\infty[$ .

1er cas. Supposons que  $\ell$  est réel. Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists A_1 \geq a / \forall X \in [a, +\infty[, (X \geq A_1 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(X+1) - f(X) < \ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit  $X \geq A_1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \sum_{k=0}^{n-1} (f(X+k+1) - f(X+k)) = f(X+n) - f(X) < \sum_{k=0}^{n-1} (\ell + \frac{\varepsilon}{2}),$$

et on a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1 \geq a / \forall X \geq A_1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(X+n) - f(X) < n(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit de nouveau  $\varepsilon > 0$ . Soit ensuite  $x \geq A_1 + 1$  puis  $n = E(x - A_1) \in \mathbb{N}^*$  puis  $X = x - n$ .

On a  $X = x - E(x - A_1) \geq x - (x - A_1) = A_1$  et donc  $n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(x) - f(x - n) < n(\ell + \frac{\varepsilon}{2})$  ou encore

$$\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ensuite,

$$1 - \frac{A_1 + 1}{x} = \frac{x - A_1 - 1}{x} \leq \frac{n}{x} = \frac{E(x - A_1)}{x} \leq \frac{x - A_1}{x} = 1 - \frac{A_1}{x},$$

et comme  $1 - \frac{A_1 + 1}{x}$  et  $1 - \frac{A_1}{x}$  tendent vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $\frac{n}{x}$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Puis, puisque  $f$  est continue sur le segment  $[A_1, A_1 + 1]$ ,  $f$  est bornée sur ce segment. Or  $n \leq x - A_1 < n + 1$  s'écrit encore  $A_1 \leq x - n < A_1 + 1$  et donc, en posant  $M = \sup\{|f(t)|, t \in [A_1, A_1 + 1]\}$ , on a  $\left| \frac{f(x-n)}{x} \right| \leq \frac{M}{x}$  qui tend

vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En résumé,  $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2})$  et  $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2})$  tendent respectivement vers  $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . On peut donc trouver un réel  $A_2 \geq a$  tel que  $x \geq A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) > (\ell - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon$  et un réel  $A_3 \geq a$  tel que  $x \geq A_3 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) < \ell + \varepsilon$ .

Soit  $A = \max(A_1, A_2, A_3)$  et  $x \geq A$ . On a  $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$ . On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, (\exists A \geq a / \forall x \geq A, \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon)$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ .

2ème cas. Supposons  $\ell = +\infty$  (si  $\ell = -\infty$ , remplacer  $f$  par  $-f$ ).

Soit  $B > 0$ .  $\exists A_1 \geq a / \forall X \geq A_1, f(X+1) - f(X) \geq 2B$ .

Pour  $X \geq A_1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $f(X+n) - f(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(X+k+1) - f(X+k)) \geq 2nB$ .

Soient  $x \geq 1 + A_1$ ,  $n = E(x - A_1)$  et  $X = x - n$ . On a  $f(x) - f(x - n) \geq 2nB$  et donc,

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x},$$

qui tend vers  $2B$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (démarche identique au 1er cas).

Donc  $\exists A \geq A_1 > a$  tel que  $x \geq A \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x} > B$ .

Finalement :  $(\forall B > 0, \exists A > a / (\forall x \geq A, \frac{f(x)}{x} > B))$  et donc,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

## Correction de l'exercice 2 ▲

Pour  $x \neq 0$ , posons  $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ .  $f$  est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe  $a > 0$  tel que  $] -a, a[ \subset D_f$ . Mais alors,  $] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[ \setminus \{0\} \subset D_g$ .

Soit  $x \in ] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[ \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})) + f(\frac{x}{2^n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g(\frac{x}{2^{k+1}}) + f(\frac{x}{2^n}).$$

Par suite, pour  $x \in ] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[ \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque par hypothèse,  $g$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0,

$$\exists \alpha \in ]0, \frac{\varepsilon}{2}[ \forall X \in ]-\alpha, \alpha[, |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour  $x \in ]-\alpha, \alpha[ \setminus \{0\}$  et pour  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\frac{x}{2^k}$  est dans  $]-\alpha, \alpha[ \setminus \{0\}$  et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc,  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|$ . On a ainsi montré que

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Mais, à  $x$  fixé,  $\frac{f(x/2^n)}{x}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc, on peut choisir  $n$  tel que  $\frac{f(x/2^n)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$  et on a alors  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in D_f, 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que ( $f$  est dérivable en 0 et que)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

$\text{Min}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$  et  $\text{Max}(f, g) = \frac{1}{2}(f - g + |f - g|)$  sont continues en  $x_0$  en vertu de théorèmes généraux.

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $z \in A$ .  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ . Or,  $\forall z \in A, |x - z| \geq d(x, A)$  et donc  $d(x, A) - |x - y|$  est un minorant de  $\{|y - z|, z \in A\}$ . Par suite,  $d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$ . On a montré que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, A) - d(y, A) \leq |y - x|.$$

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on a aussi montré que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(y, A) - d(x, A) \leq |y - x|$ .

Finalement,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |d(y, A) - d(x, A)| \leq |y - x|$ . Ainsi,  $d$  est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ . Pour  $x \neq 5$ ,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5} \right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5| \cdot |x_0-5|}.$$

Puis, pour  $x \in ]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[$ , on a  $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2}$  ( $> 0$ ), et donc,

$$\forall x \in ]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[, |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0|.$$

Soient  $\varepsilon > 0$  puis  $\alpha = \text{Min}\left\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28}\right\}$  ( $> 0$ ).

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2} \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28} = \varepsilon.$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ .  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $\chi$  la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$ . Soit  $x_0$  un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n})$  existe,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$  existe et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(x_0 + \frac{1}{n}) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$  (bien que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{\pi}{n} = x_0$ ). Ainsi, pour tout réel  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  n'a pas de limite en  $x_0$  et est donc discontinue en  $x_0$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $a$  un réel strictement positif. On peut déjà noter que  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} f(x) = 0$ . Donc, si  $f$  a une limite quand  $x$  tend vers  $a$ , ce ne peut être que 0 et  $f$  est donc discontinue en tout rationnel strictement positif.

$a$  désigne toujours un réel strictement positif fixé. Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $x$  un réel strictement positif tel que  $f(x) \geq \varepsilon$ .

$x$  est nécessairement rationnel, de la forme  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant  $\frac{1}{p+q} \geq \varepsilon$  et donc

$$2 \leq p+q \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls  $(p, q)$  vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs  $x$  tels que  $f(x) \geq \varepsilon$ .

Par suite,  $\exists \alpha > 0$  tel que aucun des réels  $x$  de  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  ne vérifie  $f(x) \geq \varepsilon$ . Donc,

$$\forall a > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x > 0, (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a > 0, \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = 0.$$

Ainsi,  $f$  est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

Donnons tout d'abord une expression plus explicite de  $f(x)$  pour chaque réel  $x$ .

Si  $x > 1$ , alors  $\frac{1}{x} \in ]0, 1[$  et donc,  $f(x) = 0$ .

Si  $\exists p \in \mathbb{N}^* / x \in ]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$ ,  $f(x) = px$ .

$f(0) = 1$  (et plus généralement,  $\forall p \in \mathbb{Z}^*, f(\frac{1}{p}) = 1$ ).

Si  $x \leq -1$ , alors  $\frac{1}{x} \in [-1, 0[$  et donc,  $f(x) = -x$ .

Enfin, si  $\exists p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  tel que  $x \in ]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$ , alors  $\frac{1}{p+1} < x \leq \frac{1}{p} (< 0)$  fournit, par décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $] -\infty, 0[$ ,  $p \leq \frac{1}{x} < p+1 (< 0)$  et donc  $f(x) = px$ .

Etude en 0.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$  et donc  $1 - x < f(x) \leq 1$  si  $x > 0$  et  $1 \leq f(x) < 1 - x$  si  $x < 0$ . Par suite,

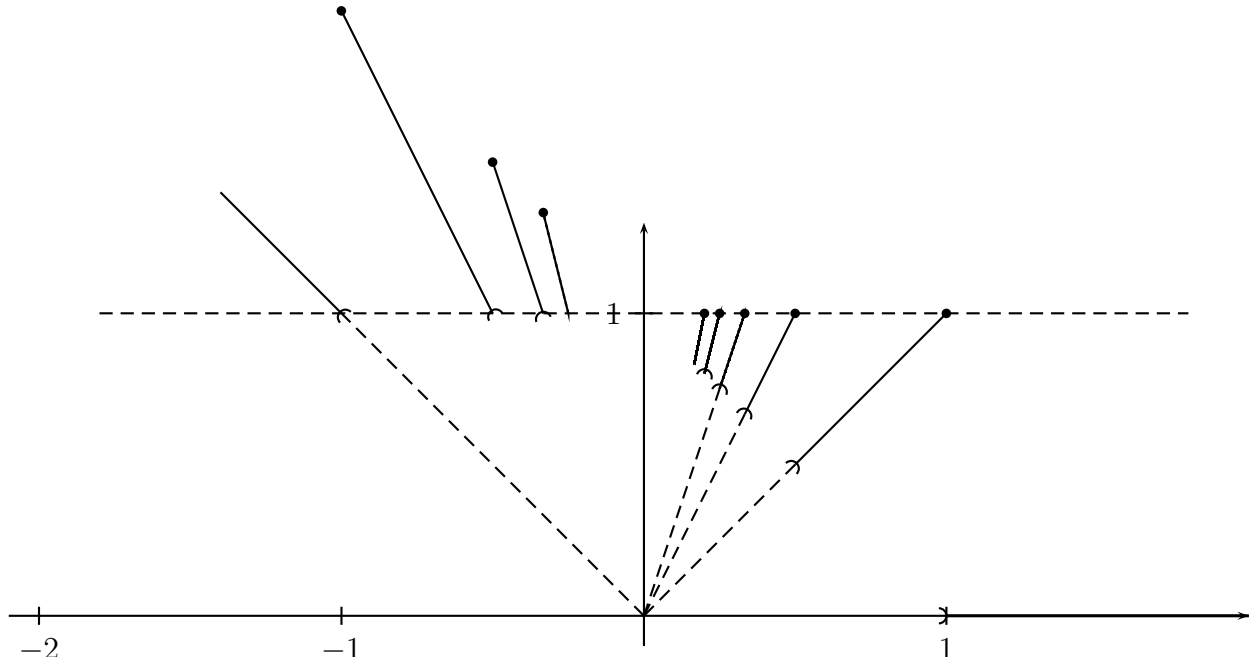
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - 1| \leq |x|,$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .  $f$  est donc continue en 0.

$f$  est affine sur chaque intervalle de la forme  $] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} ]$  pour  $p$  élément de  $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$  et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque  $\frac{1}{p}$ .  $f$  est affine sur  $] -\infty, -1]$  et aussi sur  $]1, +\infty[$  et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en  $\frac{1}{p}$ , pour  $p$  entier relatif non nul donné. Mais,

$$f\left(\frac{1}{p}^+\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}, x > \frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f\left(\frac{1}{p}\right).$$

$f$  est donc discontinue à droite en tout  $\frac{1}{p}$  où  $p$  est un entier relatif non nul donné.  
 Graphe de  $f$  :



### Correction de l'exercice 9 ▲

Soit  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\} \\ 1-x & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$ .  $f$  est bien une application définie sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .

De plus, si  $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ , alors  $f(f(x)) = f(x) = x$ .

Si  $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ , alors  $1-x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$  et donc  $f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$ .

Enfin,  $f(f(0)) = f(\frac{1}{2}) = 0$  et  $f(f(\frac{1}{2})) = f(0) = \frac{1}{2}$ .

Finalement,  $f \circ f = Id_{[0,1]}$  et  $f$ , étant une involution de  $[0, 1]$ , est une permutation de  $[0, 1]$ .

Soit  $a$  un réel de  $[0, 1]$ . On note que  $\lim_{x \rightarrow a, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} f(x) = 1-a$  et  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}} f(x) = a$ . Donc, si  $f$  a une limite en  $a$ , nécessairement  $1-a = a$  et donc  $a = \frac{1}{2}$ . Mais, si  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}, x \neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$  et donc  $f$  est discontinue en tout point de  $[0, 1]$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $T$  une période strictement positive de  $f$ . On note  $\ell$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Soit  $x$  un réel.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(x+nT)$  et quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+nT) = \ell.$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ell$  et donc,  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .