Limites. Continuité en un point

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***I

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que la fonction $f(x+1)-f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Etudier l'existence et la valeur eventuelle de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Correction ▼ [005382]

Exercice 2 ***

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. (Indication. Considérer $g(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

Correction ▼ [005383]

Exercice 3 **I

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Min}\{f,g\}$ et $\mathrm{Max}\{f,g\}$ sont continues en x_0.

Correction ▼ [005384]

Exercice 4 ***I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\mathrm{Inf}\{|y-x|,\ y\in A\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005385]

Exercice 5 **T

Montrer en revenant à la définition que $f(x)=\frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Correction ▼ [005386]

Exercice 6 **IT

Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Correction ▼ [005387]

Exercice 7 ****

Etudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=0$ si x est irrationnel et $f(x)=\frac{1}{p+q}$ si x est rationnel égal à $\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.

Correction ▼ [005388]

Exercice 8 **IT

Etudier en chaque point de $\mathbb{R}$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par $f(x)=xE(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et 1 si $x=0$.

Correction ▼ [005389]

Exercice 9 **

Trouver f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Correction ▼ [005390]

Exercice 10 ***

Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.

Correction ▼ [005391]

Correction de l'exercice 1 ▲

Il existe $a>0$ tel que f est définie et continue sur $[a,+\infty[$.
1er cas. Supposons que ℓ est réel. Soit $\varepsilon>0$.

$$\exists A_1\geqslant a/\ \forall X\in[a,+\infty[,\ (X\geqslant A_1\Rightarrow \ell-\frac{\varepsilon}{2}<f(X+1)-f(X)<\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit $X\geqslant A_1$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<\sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1)-f(X+k))=f(X+n)-f(X)<\sum_{k=0}^{n-1}(\ell+\frac{\varepsilon}{2}),$$

et on a donc montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A_1\geqslant a/\ \forall X\geqslant A_1,\ \forall n\in\mathbb{N}^N*,\ n(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<f(X+n)-f(X)<n(\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit de nouveau $\varepsilon>0$. Soit ensuite $x\geqslant A_1+1$ puis $n=E(x-A_1)\in\mathbb{N}^*$ puis $X=x-n$.
On a $X=x-E(x-A_1)\geqslant x-(x-A_1)=A_1$ et donc $n(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<f(x)-f(x-n)<n(l+\frac{\varepsilon}{2})$ ou encore

$$\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<\frac{f(x)}{x}<\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Ensuite,

$$1-\frac{A_1+1}{x}=\frac{x-A_1-1}{x}\leqslant\frac{n}{x}=\frac{E(x-A_1)}{x}\leqslant\frac{x-A_1}{x}=1-\frac{A_1}{x},$$

et comme $1-\frac{A_1+1}{x}$ et $1-\frac{A_1}{x}$ tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{n}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
Puis, puisque f est continue sur le segment $[A_1,A_1+1]$, f est bornée sur ce segment. Or $n\leqslant x-A_1<n+1$ s'écrit encore $A_1\leqslant x-n<A_1+1$ et donc, en posant $M=\sup\{|f(t)|,\ t\in[A_1,A_1+1]\}$, on a $\left|\frac{x-n)}{x}\right|\leqslant\frac{M}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En résumé, $\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})$ et $\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})$ tendent respectivement vers $\ell-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\ell+\frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc trouver un réel $A_2\geqslant a$ tel que $x\geqslant A_2\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})>(\ell-\frac{\varepsilon}{2})-\frac{\varepsilon}{2}=\ell-\varepsilon$ et un réel $A_3\geqslant a$ tel que $x\geqslant A_2\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})<\ell+\varepsilon$.
Soit $A=\mathrm{Max}(A_1,A_2,A_3)$ et $x\geqslant A$. On a $\ell-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<\ell+\varepsilon$. On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ (\exists A\geqslant a/\ \forall x\geqslant A,\ \ell-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<\ell+\varepsilon$ et donc $\lim_{x\to+\infty}=\ell$.
2ème cas. Supposons $\ell=+\infty$ (si $\ell=-\infty$, remplacer f par $-f$).
Soit $B>0$. $\exists A_1\geqslant a/\ \forall X\geqslant A_1,\ f(X+1)-f(X)\geqslant 2B$.
Pour $X\geqslant A_1$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f(X+n)-f(X)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1)-f(X+k))\geqslant 2nB$.
Soient $x\geqslant 1+A_1$, $n=E(x-A_1)$ et $X=x-n$. On a $f(x)-f(x-n)\geqslant 2nB$ et donc,

$$\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{f(x-n)}{x}+\frac{2nB}{x},$$

qui tend vers $2B$ quand x tend vers $+\infty$ (démarche identique au 1er cas).
Donc $\exists A\geqslant A_1>a$ tel que $x\geqslant A\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{2nB}{x}>B$.
Finalement : $(\forall B>0,\ \exists A>a/\ (\forall x\geqslant A,\ \frac{f(x)}{x}>B$ et donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $x\neq 0$, posons $g(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$. f est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe $a>0$ tel que $]-a,a[\subset D_f$. Mais alors, $]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}\subset D_g$.
Soit $x\in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{x}{2^k})-f(\frac{x}{2^{k+1}}))+f(\frac{x}{2^n})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x}{2^{k+1}}g(\frac{x}{2^{k+1}})+f(\frac{x}{2^n}).$$

Par suite, pour $x\in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse, g tend vers 0 quand x tend vers 0,

$$\exists \alpha \in]0, \frac{a}{2}[/ \ \forall X \in]-\alpha, \alpha[, \ |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$ et pour k dans $N*$, $\frac{x}{2^k}$ est dans $]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$ et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}(1-\frac{1}{2^n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Mais, à x fixé, $\frac{f(x/2^n)}{x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, on peut choisir n tel que $\frac{f(x/2^n)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a alors $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 / \ (\forall x \in D_f, \ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que (f est dérivable en 0 et que) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Correction de l'exercice 3 ▲

$\mathrm{Min}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\mathrm{Max}(f,g) = \frac{1}{2}(f-g+|f-g|)$ sont continues en x_0 en vertu de théorèmes généraux.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in A$. $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$. Or, $forall z \in A$, $|x-z| \geqslant d(x,A)$ et donc $d(x,A) - |x-y|$ est un minorant de $\{|y-z|, \ z \in A\}$. Par suite, $d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A)$. On a montré que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ d(x,A) - d(y,A) \leqslant |y-x|.$$

En échangeant les roles de x et y, on a aussi montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ d(y,A) - d(x,A) \leqslant |y-x|$.
Finalement, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||f(y) - f(x)| \leqslant |y-x|$. Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Pour $x \neq 5$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5}\right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5|.|x_0-5|}.$$

Puis, pour $x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[$, on a $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2} (> 0)$, et donc,

$$\forall x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[, \ |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ puis $\alpha = \mathrm{Min}\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\} (> 0)$.

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2} \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28} = \varepsilon.$$

On a monté que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ (\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{5\},\ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$. f est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit χ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$. Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_0+\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}Q\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_0+\frac{\pi}{n}\notin\mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0+\frac{1}{n})$ existe, $\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0+\frac{\pi}{n})$ existe et$\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0+\frac{1}{n})\neq\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0+\frac{\pi}{n})$ (bien que $\lim_{n\to+\infty}x_0+\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}x_0+\frac{\pi}{n}=x_0$. Ainsi, pour tout réel $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit a un réel strcitement positif. On peut déjà noter que $\lim_{x\to a,\,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}f(x)=0$. Donc, si f a une limite quand x tend vers a, ce ne peut être que 0 et f est donc discontinue en tout rationnel strictement positif.
a désigne toujours un réel strictement positif fixé. Soit $\varepsilon>0$.
Soit x un réel strictement positif tel que $f(x)\geqslant\varepsilon$.
x est nécessairement rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant $\frac{1}{p+q}\geqslant\varepsilon$ et donc

$$2\leqslant p+q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs x tels que $f(x)\geqslant\varepsilon$.
Par suite, $\exists\alpha>0$ tel que aucun des réels x de $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ ne vérifie $f(x)\geqslant\varepsilon$. Donc,

$$\forall a>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall x>0,\ (0<|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a>0,\ \lim_{x\to a,\,x\neq a}f(x)=0.$$

Ainsi, f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Correction de l'exercice 8 ▲

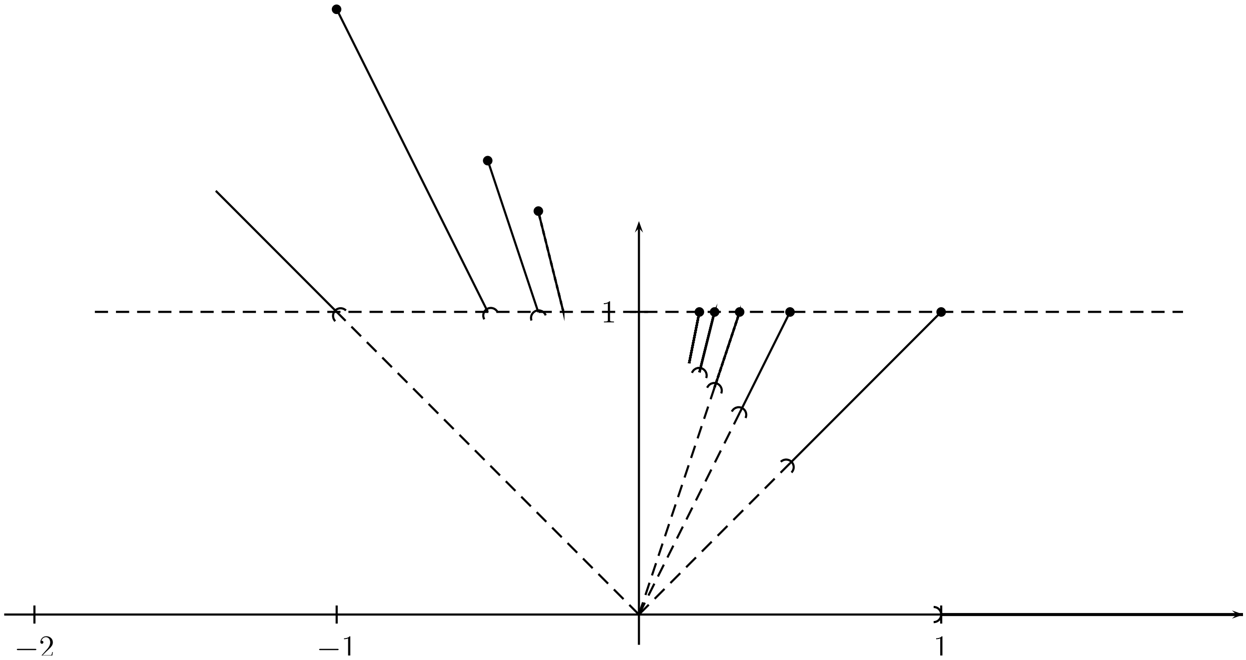
Donnons tout d'abord une expression plus explicite de $f(x)$ pour chaque réel x.
Si $x>1$, alors $\frac{1}{x}\in]0,1[$ et donc, $f(x)=0$.
Si $\exists p\in\mathbb{N}^*/\ x\in]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}]$, $f(x)=px$.
$f(0)=1$ (et plus généralement, $\forall p\in\mathbb{Z}^*,\ f(\frac{1}{p})=1$).
Si $x\leqslant-1$, alors $\frac{1}{x}\in[-1,0[$ et donc, $f(x)=-x$.
Enfin, si $\exists p\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ tel que $x\in]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}]$, alors $\frac{1}{p+1}<x\leqslant\frac{1}{p}(<0)$ fournit, par décroissance de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$, $p\leqslant\frac{1}{x}<p+1(<0)$ et donc $f(x)=px$.
Etude en 0. $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x}-1<E(\frac{1}{x})\leqslant\frac{1}{x}$ et donc $1-x<f(x)\leqslant1$ si $x>0$ et $1\leqslant f(x)<1-x$ si $x<0$. Par suite,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)-1\leqslant|x|,$$

et $\lim_{x\to0}f(x)=1$. f est donc continue en 0.
f est affine sur chaque intervalle de la forme $]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}]$ pour p élément de $\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$ et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque $\frac{1}{p}$. f est affine sur $]-\infty,-1]$ et aussi sur $]1,+\infty[$ et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en $\frac{1}{p}$, pour p entier relatif non nul donné. Mais,

$$f(\frac{1}{p}^+) = \lim_{x \to \frac{1}{p},\, x > \frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f(\frac{1}{p}).$$

f est donc discontinue à droite en tout $\frac{1}{p}$ où p est un entier relatif non nul donné.
Graphe de f :



Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\} \\ 1-x \text{ si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est bien une application définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
De plus, si $x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.
Si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, alors $1-x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ et donc $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.
Enfin, $f(f(0)) = f(\frac{1}{2}) = 0$ et $f(f(\frac{1}{2})) = f(0) = \frac{1}{2}$.
Finalement, $f \circ f = Id_{[0,1]}$ et f, étant une involution de $[0,1]$, est une permutation de $[0,1]$.
Soit a un réel de $[0,1]$. On note que $\lim_{x \to a,\, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} f(x) = 1-a$ et $\lim_{x \to a,\, x \in \mathbb{Q}} f(x) = a$. Donc, si f a une limite en a, nécessairement $1-a = a$ et donc $a = \frac{1}{2}$. Mais, si $a = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to a,\, x \in \mathbb{Q},\, x \neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$ et donc f est discontinue en tout point de $[0,1]$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.
Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x+nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x+nT) = \ell.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.
