



Systèmes d'équations linéaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{cases} & 3) \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x+2y+3z+mt=m-1 \\ 2x+y+mz+3t=1 \\ 3x+my+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{cases} & 5) \begin{cases} mx+y+z=m+2 \\ -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=-m \\ x-y-mz=m-4 \end{cases} & 6) \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{m} \end{cases} \\ 7) \begin{cases} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1 \end{cases} & 8) \begin{cases} ax+by+cz=p \\ cx+ay+bz=q \\ bx+cy+az=r \end{cases} & \\ 9) \begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{cases} & \text{(où } a, b, \text{ et } c \text{ sont les racines de l'équation} & t^3-t+1=0). \end{array}$$

[Correction ▼](#)

[005375]

Exercice 2

Donner une base du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 défini par :

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{cases}.$$

[Correction ▼](#)

[005376]

Exercice 3

Dans le plan, on donne n points A_1, \dots, A_n . Existe-t-il n points M_1, \dots, M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3], \dots, A_{n-1}$ soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

[Correction ▼](#)

[005377]

Exercice 4

Résoudre le système : $x_1+x_2=0, x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$ pour $k=2, \dots, n-1, x_{n-1}+x_n=0$.

[Correction ▼](#)

[005378]

Exercice 5

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et (f_1, f_2, \dots, f_n) un n -uplet de fonctions de E dans \mathbb{C} . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la famille (f_1, \dots, f_n) est libre ;
2. il existe n éléments a_1, a_2, \dots, a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$.

[Correction ▼](#)

[005379]

Exercice 6

Déterminer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

[Correction ▼](#)

[005380]

Exercice 7

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes $a_i + b_j$ soient toutes non nulles. Résoudre le système $\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_i + b_j} = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$ (en utilisant la décomposition en éléments simples de $R = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X + b_j}$).

[Correction ▼](#)

[005381]

Correction de l'exercice 1 ▲

m est un paramètre réel

1. $\det S = 2(m(m-5) - 6) + (3(m-5) - 3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$. Le système est de CRAMER si et seulement si $m \in \{1, 6\}$. Si $m \notin \{1, 6\}$, les formules de CRAMER fournissent alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1} \\ y &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1} \\ z &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & m7 \end{vmatrix} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1} \end{aligned}$$

Si $m \in \{1, 6\}$, $\det S = 0$. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\begin{cases} x = \frac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \frac{14-(2m+3)y}{5} \end{cases}$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent automatiquement pour $m \in \{1, 6\}$ et donc pas la peine de les calculer).

$$\begin{aligned} 7x + 2y + (m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7 \frac{3+(m-6)y}{5} + 2y + (m-5) \frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) - 35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5}), y \in \mathbb{R}\}$.

2. $\det S = 2(-8m-4+2) - (4m+1) + 5(2m+2m+1) = 0$. Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\begin{cases} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{cases}$. La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$\begin{aligned} 5x - y + 4z = 3m - 2 &\Leftrightarrow 5 \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4 \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m - 2 \\ &\Leftrightarrow 5(6m-4) + 4(-3m+8) - 3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution. Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{(-\frac{16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3}), y \in \mathbb{R}\}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m = -2m(m-1)$. Le système est de CRAMER en x, y et z si et seulement si $m \in \{0, 1\}$.

Si $m \notin \{0, 1\}$, les formules de CRAMER fournissent :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1 \\
y &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1 \\
z &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(-t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = 0$, le système s'écrit $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+z=2 \\ y+t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x \\ t=-1-y \end{cases}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x, y, 2-x, 1-y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si $m = 1$, le système s'écrit $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+y+z-t=3 \\ x-y-z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x=1 \\ z=2-y \end{cases}$. Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $\{(1, y, 2-y, 0), z \in \mathbb{R}\}$.

4.

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} \\
&= (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-4)(m+6).
\end{aligned}$$

Le système est de CRAMER si et seulement si $m \notin \{0, 2, 4, -6\}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)x &= \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -[-3(5m-6) - (m-6)(-m^2+5m-3)] \\
&= -m^3 + 11m^2 - 18m = -m(m-2)(m-9).
\end{aligned}$$

$$\text{et } x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)y &= \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3) \\
&= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)
\end{aligned}$$

et $y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6) = -2m^3+7m^2-6m \\
&= -m(2m-3)(m-2),
\end{aligned}$$

et $z = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)t &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3) \\
&= m^4-m^3-17m^2+30m = m(m-2)(m^2+m-15)
\end{aligned}$$

et $t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.

Si $m = 0$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+2y+3z = -1 \\ 2x+y+3t = 1 \\ 3x+z+2t = 0 \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t = (E_1+E_2) \\ 2x+y+3t = 1 \\ x+y+z+t = 0(E_3+E_4) \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ -x-2y-3z = 1 \\ -x+2y+z = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-2y \\ -x-2y-3(x-2y) = 1 \\ t = -x-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{4}z = -x - \frac{1}{2} \\ t = -x + \frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble de solutions : $\{(x, x + \frac{1}{4}, -x - \frac{1}{4}; -x + \frac{1}{2}), x \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = 2$, on obtient pour ensemble de solutions : $\{(x, -x - \frac{5}{8}, x + \frac{1}{2}; -x - \frac{1}{8}), x \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = 4$ ou $m = -6$, on voit en résolvant que le système est incompatible.

$$5. \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m) + (-m+1) + (m+1) = 2(m^2+1) \neq 0 \text{ (} m \text{ désignant un paramètre réel).}$$

Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1}, y = 3 - m \text{ et } z = \frac{3m - 1}{m^2 + 1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$\begin{aligned} -m \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1} + 3 - m + m \frac{3m - 1}{m^2 + 1} &= -m \\ \Leftrightarrow -m(2m^2 - m - 1) + (3 - m)(m^2 + 1) + m(3m - 1) &= -m(m^2 + 1) \\ \Leftrightarrow -2m^3 + 7m^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si m est l'une des trois racines de l'équation $-2X^3 + 7X^2 + 3 = 0$.

$$6. \det S = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\text{Van}(a,b,c)}{abc}.$$

Si a, b et c sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc \text{ Van}(m,b,c)}{mbc \text{ Van}(a,b,c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles, $y = \frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ et $z = \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.

Si $a = b \neq c$ (ou $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$), le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ ax + ay + cz = m \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ a(1 - z) + cz = m \\ \frac{1}{a}(1 - z) + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ z = \frac{m-a}{c-a} \\ (\frac{1}{c} - \frac{1}{a})\frac{m-a}{c-a} = \frac{1}{m} - \frac{1}{a} \end{cases}.$$

Le système est compatible si et seulement si $(m-a)(m-c) = 0$ ou encore $(m = a$ ou $m = c)$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est : $\{(x, \frac{m-c}{a-c} - x; \frac{m-a}{c-a}), x \in \mathbb{R}\}$.

Si $a = b = c$, le système s'écrit : $x + y + z = 1 = \frac{m}{a} = \frac{a}{m}$. Le système est compatible si et seulement si $m = a = b = c$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est : $\{(x, y, 1 - x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

7.

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - (b+c)^2 & (a+c)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & b^2 - (a+c)^2 & (a+b)^2 - c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} \\ &= 2(a+b+c)^2 (c^2(-c(b-a-c) + (b-c)(a+c-b)) + (a+b-c)(bc(a+c-b) + b^2c)) \\ &= 2(a+b+c)^2 (c^2b(a-b+c) + (a+b-c)bc(a+c)) \\ &= 2bc(a+b+c)^2 (a^2 + ab + ac) = 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Si $abc(a+b+c) \neq 0$, le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)}, y = \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} \text{ et } z = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a = 0$ (ou $b = 0$ ou $c = 0$), le système s'écrit :

$$\begin{cases} (b+c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ c^2(y+z) = 1 \\ b^2(y+z) = 1 \end{cases}.$$

Donc,

Si $((a = 0 \text{ et } b^2 \neq c^2) \text{ ou } (b = 0 \text{ et } a^2 \neq c^2) \text{ ou } (c = 0 \text{ et } a^2 \neq b^2))$, le système n'a pas de solution.

Si $a = 0$ et $b = c \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(0, y, -\frac{y}{b^2}), y \in \mathbb{R}\}$ (résultats analogues pour les cas $(b = 0 \text{ et } a = c \neq 0)$ et $(c = 0 \text{ et } a = b \neq 0)$).

Si $a = b = c = 0$, il n'y a pas de solution.

Si $a = 0$ et $c = -b \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x, y - \frac{y}{b^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (résultats analogues pour $(b = 0 \text{ et } c = -a \neq 0)$ et $(c = 0 \text{ et } b = -a \neq 0)$).

Si $abc \neq 0$ et $a+b+c = 0$, le système équivaut à l'équation $a^2x + b^2y + c^2z = 1$. L'ensemble des solutions est $\{(x, y, \frac{1-a^2x-b^2y}{c^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

8.

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)((a-b)(a-c) + (b-c)^2) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= (a+b+c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) \end{aligned}$$

Si $\det S \neq 0$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x \det S = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2 - bc) + q(c^2 - ab) + r(b^2 - ac).$$

Je n'ai pas envie de finir.

9. Soit $P = X^3 - X - 1$. P et $P' = 3X^2 - 1$ n'ont pas de racines communes dans \mathbb{C} car $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas racines de P et donc les racines de P sont simples ou encore, a, b et c sont deux à deux distincts.

Ainsi, $\det S = \text{Van}(a, b, c) \neq 0$ et le système est de CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -2(c^2 - b^2) + 3(c-b) = (c-b)(3 - 2(b+c)) = (c-b)(3+2a),$$

$$(\text{car } a+b+c=0) \text{ et } x = \frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}.$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & c \\ a^2 & 3 & c^2 \end{vmatrix} = 2(c^2 - a^2) - 3(c-a) = (c-a)(2(a+c) - 3) = -(c-a)(3+2b),$$

$$\text{et } y = -\frac{3+2b}{(b-a)(c-a)}.$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \\ a^2 & b^2 & 3 \end{vmatrix} = -2(b^2 - a^2) + 3(b-a) = (b-a)(3+2c),$$

$$\text{et } z = \frac{3+2c}{(c-a)(c-b)} \text{ (difficile d'aller plus loin).}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0 \text{ et le système est de CRAMER en } x_1, x_2 \text{ et } x_4. \text{ On note aussi que le}$$

système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 de dimension $5 - 3 = 2$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $F = \{(3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5), (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (3, -1, 1, 0, 0)$ et $e_2 = (3, -2, 0, 0, 1)$ et, puisque $\dim F = 2$, une base de F est (e_1, e_2) .

Correction de l'exercice 3 ▲

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k , le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}.$$

Si n est impair, $\det S = 2 \neq 0$ et le système admet une et une seule solution.

On obtient $z_2 = 2a_1 - z_1, z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots, z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc $z_1 = a_1 - a_2 + \dots - a_{n-1} + a_n$ puis $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n$ puis $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \dots + a_n$... puis $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Si n est pair, $\det S = 0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang $n-1$, les $n-1$ premières équations et $n-1$ dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.

On résout les $n - 1$ premières équations constituant un système de CRAMER en z_2, \dots, z_n . On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z_1, z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots, z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 \dots = a_2 + a_4 + \dots$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points (A_1, A_3, \dots) et (A_2, A_4, \dots) ont même isobarycentre.

En résumé, si n est pair et si les systèmes de points (A_1, A_3, \dots) et (A_2, A_4, \dots) n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.

Si n est pair et si les systèmes de points (A_1, A_3, \dots) et (A_2, A_4, \dots) ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points $A_1, A_2 \dots$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit D_n le déterminant du système pour $n \geq 3$.

En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 5, D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de $D_3 = D_4 = -1$:

$$\forall k \geq 1, D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour n élément de $3\mathbb{N}^* \cup (1 + 3\mathbb{N}^*)$, le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.

Pour $n = 3k + 2$, puisque $D_n = 0$ mais que le mineur de format $n - 1$ constitué des $n - 1$ premières lignes et colonnes est D_{n-1} et est donc non nul, le système est homogène de rang $n - 1$ et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension 1. On trouve aisément $\mathcal{S} = \{\lambda(1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots, 1, -1), ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

(1) \Rightarrow (2). Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que : $(\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n / (\det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0) \Rightarrow ((f_1, \dots, f_n)$ liée).

Pour $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1 / f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

Soit $n \geq 2$. Supposons que $(\forall (a_1, \dots, a_{n-1}) \in E^{n-1} / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} = 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_{n-1})$ liée.

Soient f_1, \dots, f_n n fonctions telles que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0$.

Si (f_1, \dots, f_{n-1}) est liée alors (f_1, \dots, f_n) est liée en tant que sur famille d'une famille liée. Si (f_1, \dots, f_{n-1}) est libre, par hypothèse de récurrence, il existe a_1, \dots, a_{n-1} $n - 1$ éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$. Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E, \det(f_i(a_1), \dots, f_i(a_{n-1}), f_i(x))_{1 \leq i \leq n} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_n = \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$ ce qui montre encore que (f_1, \dots, f_n) est liée.

(2) \Rightarrow (1). On suppose que $\exists (a_1, \dots, a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$. Montrons que (f_1, \dots, f_n) est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En particulier : $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. On a montré que (f_1, \dots, f_n) est libre.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit A_n la matrice de l'énoncé.

En développant $\det A_n$ suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $\det A_n = -\det A_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

Par suite, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p} = (-1)^{p-1} \det A_2 = (-1)^p \neq 0$ et pour $p \geq 1$, A_{2p} est inversible.

On a aussi, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p+1} = (-1)^{p-1} \det A_3 = 0$ et, pour $p \geq 1$, A_{2p+1} n'est pas inversible. Finalement, A_n est inversible si et seulement si n est pair.

Dorénavant, on pose $n = 2p$ ($p \geq 1$).

Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \{2, \dots, 2p-1\}, x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{cases} .$$

Ce système se résout en $x_2 = y_1$ puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + \dots + (-1)^{k-1} y_1$ et aussi $x_{2p-1} = y_{2p}$, puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + \dots + (-1)^{p-k} y_{2p}$. D'où l'inverse de A quand $n = 8$ par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $F = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X+b_k}$.

La fraction rationnelle F s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^n (X + b_k) \text{ et } P \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, (Q - P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les a_k sont deux à deux distincts, $Q - P$ est divisible par $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$. Mais, Q est unitaire de degré n et P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et donc $Q - P$ est unitaire de degré n ce qui montre que $Q - P = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

Réciproquement, si $F = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}$, alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $F(a_k) = 1$.

En résumé,

$$\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de } (S) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X + b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \lim_{x \rightarrow -b_i} (x + b_i) \frac{\prod_{k=1}^n (x + b_k) - \prod_{k=1}^n (x - a_k)}{\prod_{k=1}^n (x + b_k)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{\prod_{k=1}^n (b_i + a_k)}{\prod_{k=1}^n (b_k - b_i)}
\end{aligned}$$
