Déterminants

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **

Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Correction ▼ [005362]

Exercice 2 **

Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005363]

Exercice 3 ***

Calculer :

1. $\det(|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
2. $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (a_1,...,a_n étant n réels donnés)
3. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$
6. $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$

Correction ▼ [005364]

Exercice 4 **** Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT

Soit $A = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes a_i+b_j soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

Correction ▼ [005365]

Exercice 5 ****

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j} \in \{-1,1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Correction ▼ [005366]

Exercice 6 ***

Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005367]

Exercice 7 ***I

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \geqslant 0$.

Correction ▼ [005368]

Exercice 8 **I

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

Correction ▼ [005369]

Exercice 9 ***I

Déterminer les matrices A, carrées d'ordre n, telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Correction ▼ [005370]

Exercice 10 **** Déterminant circulant

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [005371]

Exercice 11 ***I

Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005372]

Exercice 12 ***I Dérivée d'un déterminant

Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $\{1,...,n\}^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A = (ai,j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer

1. $$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$$

Correction ▼ [005373]

Exercice 13 ***I

Calculer

1. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $\det((i+j-1)^2)$

3. $$\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix} b,\ c \text{ complexes distincts}$$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Correction ▼ [005374]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x)=\begin{vmatrix}-2x&x+b&x+c\\b+x&-2b&b+c\\c+x&c+b&-2c\end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta=D(a)$)). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c)+(b+c)+(b+c)-(-2b)=4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b)=\begin{vmatrix}2b&0&-b+c\\0&-2b&b+c\\c-b&c+b&-2c\end{vmatrix}=2b(4bc-(b+c)^2)+2b(c-b)^2=0,$$

et par symétrie des rôles de b et c, $D(-c)=0$. De ce qui précède, on déduit que si $b\neq c$, $D(x)=4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b+c=0$ car alors D est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul). Ainsi, si $b\neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a\neq b$ ou $a\neq c$), on a : $\Delta=4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a=b=c$. Dans ce cas,

$$D(a)=\begin{vmatrix}-2a&2a&2a\\2a&-2a&2a\\2a&2a&-2a\end{vmatrix}=8a^3\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=32a^3=4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c=b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c\neq b$).

$$\boxed{\Delta=4(a+b)(a+c)(b+c).}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $P=\begin{vmatrix}X&a&b&c\\a&X&c&b\\b&c&X&a\\c&b&a&X\end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4. En remplaçant C_1 par $C_1+C_2+C_3+C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X+a+b+c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1-C_2-C_3+C_4$ ou $C_1-C_2+C_3-C_4$ ou $C_1+C_2-C_3-C_4$, on voit que P est divisible par $(X-a-b+c)$ ou $(X-a+b-c)$ ou $(X+a-b-c)$. **1er cas.** Si les quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P=(X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c)$. **2ème cas.** Deux au moins des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux. Notons alors que $-a-b-c=a+b-c\Leftrightarrow b=-a$ et que $-a+b+c=a-b+c\Leftrightarrow a=b$. Par symétrie des roles, deux des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres $|a|$, $|b|$ ou $|c|$ sont égaux. On conclut dans ce cas que l'expression de P précédemment trouvée reste valable par continuité par rapport à a, b ou c.

$$\boxed{P=(X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c).}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $n \geqslant 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1. Pour cela, on effectue les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis ... puis $C_{n-1} = C_{n-1} - C_n$. On obtient

$$\Delta_n = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, ..., C_{n-1} - C_n, C_n) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On fait alors apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1, L_2, ..., L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, ..., L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = (1-n)(-2)^{n-2}.}$$

2. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$, on a $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \cos a_j S + \sin a_j C$. En particulier, $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n) \subset \mathrm{Vect}(C, S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0.}$$

Si $n = 2$, $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1 + a_2)$.

3. L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(pour } 1 \leqslant j \leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, ..., \ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{(pour } p+1 \leqslant i \leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2-b^2)^p$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{2p} = (a^2-b^2)^p.}$$

4. On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, ..., C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, ..., C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = ... = \det(A_1) = 1$.

6. En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1}-X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n+k+1}a_k\Delta_k,$$

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ D_n = (-1)^n\left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soient λ_1,..., λ_n, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n}\det(C_1,...,C_{n-1},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_j) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $R = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{X+b_j}$. On prend $R = \frac{(X-a_1)...(X-a_{n-1})}{(X+b_1)...(X+b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée. Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = ... = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n}R(a_n)\Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z\to -b_n}(z+bn)R(z) = \frac{(-b_n-a_1)...(-b_n-a_{n-1})}{(-b_n+b_1)...(-b_n+b_{n-1})} = \frac{(a_1+b_n)...(a_{n-1}+b_n)}{(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)...(a_n+b_n)..(a_2+b_n)(a_1+b_n)}\Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,...,a_n)\mathrm{Van}(b_1,...,b_n)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer : $H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)^2}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}$. Mais,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,...,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ H_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k!\right)^3}{n!^2 \times \prod_{k=1}^{2n} k!}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. • Pour $n = 1$, c'est clair. • Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit divisible par 2^{n-1}. Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé. Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geqslant 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n. Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1. Soit (i,j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) - \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j - C'_j, \dots, C_n),$$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n. Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Ce dernier déterminant étant nul, le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 6 ▲

$\Delta = \det M = \mathrm{Van}(1, 2, \dots, n) \neq 0$ et le système est de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k = \mathrm{Van}(1, \dots, k-1, 0, k+1, \dots, n) = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k-ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n \times \mathrm{Van}(1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k} \frac{\mathrm{Van}(1, 2, \dots, n)}{(k-(k-1)) \dots (k-1)((k+1)-k) \dots (n-k)} = (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Delta, \end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = (-1)^{k+1}C_n^k.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

En remplaçant les colonnes C_1,..., C_n par respectivement $C_1 + iC_{n+1}$,..., $C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes L_{n+1},..., L_{2n} de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1} - iL_1$,..., $L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+...+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+...+n+\sigma(n) = 2(1+2+...+n) \in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6...On obtient $\det B = (-1)^{2p}\det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Correction de l'exercice 9 ▲

On suppose $n \geqslant 2$. La matrice nulle est solution du problème. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(A+B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det A = \det(2A) = 2^n \det A$ et donc $\det A = 0$ car $n \geqslant 2$. Ainsi, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-Cj$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C_1', \dots, -C_j, \dots, C_n')$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement C_1',...,$-C_j$,...,C_n' est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A+B$ a une colonne nulle et donc $\det(A+B) = 0 \neq \det A + \det B$. Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème .

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ (\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A+M) = \det(A) + \det(M)) \Leftrightarrow A = 0.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

• Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leqslant k+l-2 \leqslant 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0,n\} \Leftrightarrow k+l = 2$ ou $k+l = n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. • Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de $P\overline{P}$ est

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\overline{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$). Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$. Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}
\sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v &= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{v=l-n+1}^{0} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} \text{ (en posant } w = v+n) \\
&= \sum_{v=1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^{n} \omega^{(k-1)(l-w)} a_w \\
&= \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v = \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v
\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)} a_v$). Pour k élément de $[\![1,n]\!]$, posons alors $S_k = \sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v$. On a montré que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$.
Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\det(PA) = \det(\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leqslant k,l \leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right) \times \det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leqslant k,l \leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right) \times \det P.$$

Donc $(\det P)(\det A) = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right) \det P$ et finalement, puisque $\det P \neq 0$,

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{v=1}^{n} \omega^{(k-1)(1-v)} a_v\right).}$$

Par exemple, pour $n = 3$, $\det A = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + ja_2 + j^2 a_3)(a_1 + j^2 a_2 + ja_3)$.

Correction de l'exercice 11 ▲

On a toujours $A \times {}^t\text{com}A = (\det A) I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)(\det({}^t\text{com}A)) = \det(\det A\, I_n) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A \neq 0$, on obtient $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$. • Si $\det A = 0$, alors $A\,{}^t\text{com}A = 0$ et $\text{com}A$ n'est pas inversible car sinon, $A = 0$ puis $\text{com}A = 0$ ce qui est absurde. Donc, $\det(\text{com}A) = 0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

• Si $\text{rg}A = n$, alors $\text{com}A \in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\text{com}A) \neq 0$) et $\text{rg}(\text{com}A) = n$. • Si $\text{rg}A \leqslant n-2$, alors tous les mineurs de format $n-1$ sont nuls et $\text{com}A = 0$. Dans ce cas, $\text{rg}(\text{com}A) = 0$. • Si $\text{rg}A = n-1$, il existe un mineur de format $n-1$ non nul et $\text{com}A \neq 0$. Dans ce cas, $1 \leqslant \text{rg}(\text{com}A) \leqslant n-1$. Plus précisément,

$$A^t\text{com}A = 0 \Rightarrow \text{com}A^tA = 0 \Rightarrow \text{Im}(^tA) \subset \text{Ker}(\text{com}A) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(\text{com}A)) \geqslant \text{rg}(^tA) = \text{rg}A = n-1 \Rightarrow \text{rg}(\text{com}A) \leqslant 1,$$

et finalement si $\text{rg}A = n-1$, $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.

Correction de l'exercice 12 ▲

$$\begin{aligned}(\det A)' &= \left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n}a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^{n}\det(C_1,\dots,C'_k,\dots,C_n)\end{aligned}$$

Applications.

1. Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1\\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1\end{vmatrix}$. Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n}\delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$. Ensuite, on a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ ... Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$. C'est vrai pour $n = 1$ puis, si pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = x^n + nx^{n-1}.}$$

2. Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x\\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ x & \dots & \dots & x & x+a_n\end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + xC, \dots, a_ne_n + xC)$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1, \dots, a_ne_n) + \sum\det(a_1e_1, \dots, xC, \dots, a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta'_n(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^{n}a_k = \sigma_n$ puis $\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^{n}\det(a_1e_1, \dots, C, \dots, a_ne_n) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}a_i = \sigma_{n-1}$. Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour le premier déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le deuxième, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le premier déterminant. Le deuxième déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

2. Pour (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2+2(i-1)j+(i-1)^2$. Donc,

$$\forall j \in \{1,...,n\},\ C_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n} + ((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\text{Vect}((1)_{1\leqslant i\leqslant n},(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n},((i-1)2)_{1\leqslant i\leqslant n})$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang infèrieur ou égal à 3. Donc, si $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225-256)-4(100-144)+9(64-81) = -31+176-153 = -8$.

3.

$$\Delta_n = \det(C_1,...,C_n) = \det(C_1+...+C_n,C_2,...,C_n) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2,..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4. Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1+xC,...,C_n+xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $C = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1,...,C_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(C_1,...,C_{k-1},xC,C_{k+1},...,C_n),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n = AX+B$ et $P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X)$. Quand $x=-b$ ou $x=-c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc : **1er cas.** Si $b \neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\begin{cases} -bA+B = P(b) \\ -cA+B = P(c) \end{cases}$ et donc $A = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ et $B = \frac{cP(b)-bP(c)}{c-b}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } b \neq c,\ \Delta_n = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}x + \frac{cP(b)-bP(c)}{c-b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).}$$

2ème cas. Si $b = c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynômiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b = c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b \neq c$. Maintenant, quand b tend vers c, $-\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b)-bP(c)}{c-b} = \frac{c(P(b)-P(c))+(c-b)P(c)}{c-b},$$

tend vers $-bP'(b)+P(b)$.

$$\boxed{\text{si } b=c,\ \Delta_n = -xP'(b)+P(b)-bP'(b) \text{ où } P=\prod_{k=1}^{n}(a_k-X).}$$

5. $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 3-2 = 4$. Puis, pour $n \geqslant 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geqslant 4$, $\Delta_n-\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n-\Delta_{n-1})_{n\geqslant 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\Delta_n-\Delta_{n-1} = \Delta_3-\Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2+(n-2)\times 1 = n+1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n+1.}$$