Polynômes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***I

Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$, $b_n = \prod_{k=1}^{n} \cos(a+\frac{k\pi}{n})$ et $c_n = \prod_{k=1}^{n} \tan(a+\frac{k\pi}{n})$ en éliminant tous les cas particuliers concernant a.

Correction ▼ [005313]

Exercice 2 ***

On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q = 1+2X+...+nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Correction ▼ [005314]

Exercice 3 ***

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}) = n(n-1)$. (Indication. Poser $x_k = \mathrm{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$ puis trouver un polynôme dont les x_k sont les racines.)

Correction ▼ [005315]

Exercice 4 ****I

1. Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i\sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}}$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n, on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$).
3. Montrer que pour tout réel x de $]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\mathrm{cotan}\,x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.
4. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

Correction ▼ [005316]

Exercice 5 **IT

Déterminer le PGCD de $X^6-7X^4+8X^3-7X+7$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7$.

Correction ▼ [005317]

Exercice 6 **T

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par X^2+X+1 ?

Correction ▼ [005318]

Exercice 7 ***

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2+S^2$.

Correction ▼ [005319]

Exercice 8 **

Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

Correction ▼ [005320]

Exercice 9 ***

Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m=P(n)$.

1. Montrer que $\forall k\in\mathbb{Z},\ P(n+km)$ est un entier divisible par m.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

Correction ▼ [005321]

Exercice 10 *** Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$

Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a\in\mathbb{Z},\ P(a)\in\mathbb{Z}$.

1. On pose $P_0=1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)$ (on peut définir la notation $P_n=C_{X+n}n$). Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n\in E$.
2. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E.
3. Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n.

Correction ▼ [005322]

Exercice 11 ***

Division euclidienne de $P=\sin aX^n-\sin(na)X+\sin((n-1)a)$ par $Q=X^2-2X\cos a+1$, a réel donné.

Correction ▼ [005323]

Exercice 12 ****I Théorème de LUCAS

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs des racines de P (on dit que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\frac{P'}{P}$.

Correction ▼ [005324]

Exercice 13 ***

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Correction ▼ [005325]

Exercice 14 ***T

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X)+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X)-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Correction ▼ [005326]

Exercice 15 ***I

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Correction ▼ [005327]

Exercice 16 **T

Déterminer $a\in\mathbb{C}$ tel que $P=X^5-209X+a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

Correction ▼ [005328]

Exercice 17 ***T

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ la famille des racines de $P = X^5+2X^4-X-1$. Calculer $\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k+2}{a_k-1}$.

Correction ▼ [005329]

Exercice 18 **

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^4$) le système :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26 \end{array}\right. .$$

Correction ▼ [005330]

Exercice 19 **T

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Correction ▼ [005331]

Exercice 20 **

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4+X^3+15X^2-20X+4$.

Correction ▼ [005332]

Exercice 21 ***

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$ est divisible par $2X^3-3X^2+X$ puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [005333]

Exercice 22 **I

Déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n+V(1-X)^m = 1$ et $\deg(U) < m$ et $\deg(V) < n$.

Correction ▼ [005334]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+...+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2}(e^{i\pi/2})^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Il reste à calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont les $n-1$ racines n-ièmes de 1 distinctes de 1 et puisque $X^n - 1 = (X-1)(1+X+...+X^{n-1})$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1+X+...+X^{n-1}$. Par suite, $1+X+...+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{-2ik\pi/n})$, et en particulier $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1+1...+1 = n$.

2ème solution. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, posons $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Les z_k sont deux à deux distincts et racines du polynôme $P = (1-X)^n - 1 = -X + ... + (-1)^n X^n = X(-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1})$. Maintenant, $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \leqslant k \in n\mathbb{Z}$ (ce qui n'est pas pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Donc, les z_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme de degré $n-1$: $-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1}$. Ce sont ainsi toutes les racines de ce polynôme ou encore

$$-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k).$$

En particulier, en égalant les coefficients constants,

$$(-1)^n.(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} z_k = -n,$$

et donc encore une fois $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = n$.

Finalement,

$$\forall n \geqslant 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} + e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=1}^{n} (e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1).$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{-ina} e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+...+n)} = e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

D'autre part, soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X + e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \prod_{k=1}^{n}(X - (-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$. Pour tout k, on a $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}})^n = (-1)^n e^{2ina}$. Par suite, les n nombres deux à deux distincts $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ sont racines du polynôme $X^n - (-1)^n e^{2ina}$, de degré n. On en déduit que, $P = X^n - (-1)^n e^{2ina}$.

Par suite, $\prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1) = P(1) = 1 - (-1)^n e^{2ina} = 1 - e^{2ina+n\pi}$, puis

$$b_n = \frac{1}{2^n} e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}(1 - e^{2ina+n\pi}) = \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} - e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})})$$
$$= \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}) = \frac{\cos(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}.$$

3.

$$c_n \text{ est défini} \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ a+\frac{k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a-\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \notin \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour les a tels que c_n est défini, on a $c_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{i}\frac{e^{2i(a+k\pi/n)}-1}{e^{2i(a+k\pi/n)}+1}$.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, posons $\omega_k = e^{2i(a+k\pi/n)}$ puis $z_k = \frac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$. On a donc $c_n = \frac{1}{i^n}\prod_{k=1}^{n} z_k$.
Puisque $z_k = \frac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$, on a $\omega_k(1-z_k) = 1+z_k$ et donc, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega_k^n(1-z_k)^n = (1+z_k)^n$ ou encore, les z_k sont racines du polynôme $P = (1+X)^n - e^{2ina}(1-X)^n$. Maintenant, les $a+\frac{k\pi}{n}$ sont dans $[a,a+\pi[$ et donc deux à deux distincts puisque la fonction tangente est injective sur tout intervalle de cette forme.
1er cas. Si $e^{2ina} \neq (-1)^n$ alors P est de degré n et $P = (1-(-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$. En évaluant en 0, on obtient

$$(1-(-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(-z_k) = 1-e^{2ina}.$$

D'où,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1-e^{2ina}}{(-1)^n-e^{2ina}} = \frac{1-e^{2ina}}{e^{in\pi}-e^{2ina}} = \frac{e^{ina}}{e^{in\pi/2}e^{ina}}\frac{-2i\sin(na)}{-2i\sin n(a-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n}\frac{\sin(na)}{\sin n(a-\frac{\pi}{2})}.$$

Finalement, $c_n = (-1)^n \frac{\sin(na)}{\sin(n(a-\frac{\pi}{2}))}$.
Si n est pair, posons $n=2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. $c_n = c_{2p} = \frac{\sin(2pa)}{\sin(2pa-p\pi)} = (-1)^p$.
Si n est impair, posons $n = 2p+1$. $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p+1)a)$.
2ème cas. Si $e^{2ina} = (-1)^n$, alors $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ou encore $a \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, c_n n'est pas défini.

Correction de l'exercice 2 ▲

Tout d'abord

$$Q = (1+X+...+X^n)' = (\frac{X^{n+1}-1}{X-1})' = \frac{(n+1)X^n(X-1)-X^{n+1}}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1}-(n+1)\omega_k^n+1}{(\omega_k-1)^2} = \frac{n\omega_k-(n+1)+1}{(\omega_k-1)^2} = \frac{n}{\omega_k-1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n}{\omega_k-1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1)}.$$

Mais, $X^n-1 = (X-1)(1+X+...+X^{n-1})$ et d'autre part $X^n-1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n}) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega_k)$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, $\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n}) = 1+X+...+X^{n-1}$ (Une autre rédaction possible est : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = (z-1)(1+z+...+z^{n-1})$ et donc $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = 1+z+...+z^{n-1}$ et finalement $\forall z \in \mathbb{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = 1+z+...+z^{n-1}$ car les deux polynômes ci-contre coincident en une infinité de valeurs de z.)
En particulier, $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k) = 1+1^2+...+1^{n-1} = n$ ou encore $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1) = (-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2}\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Il faut prendre garde au fait que les nombres $x_k = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$ ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

1er cas. Si n est pair, posons $n=2p$, $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})+\sum_{k=p}^{2p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})+\sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{(2p-1-k)\pi}{2p})\end{aligned}$$

Or, $\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{(2p-1-k)\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\pi-\frac{\pi}{4p}-\frac{k\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})$ et donc $S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})$.

Mais cette fois ci,

$$0\leqslant k\leqslant p-1 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p}\leqslant\frac{\pi}{4p}+\frac{(p-1)\pi}{2p}=\frac{(2p-1)\pi}{4p}<\frac{2p\pi}{4p}=\frac{\pi}{2}.$$

et comme, la fonction $x\mapsto \text{cotan}^2 x$ est strictement décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, les x_k, $0\leqslant k\leqslant p-1$, sont deux à deux distincts.

Pour $0\leqslant k\leqslant p-1$, posons $y_k = \text{cotan}(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})$.

$$\begin{aligned}y_k = i\frac{e^{(2k+1)i\pi/4p}+1}{e^{(2k+1)i\pi/4p}-1} &\Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p}(y-k-i)=y_k+i\\ &\Rightarrow (y_k+i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi}(y_k-i)^{2p} = (-1)^{2k+1}(y_k-i)^{2p} = -(y_k-i)^{2p}\\ &\Rightarrow (y_k+i)^{2p}+(y_k-i)^{2p}=0 \Rightarrow 2(y_k^{2p}-C_{2p}^2y_k^{2p-2}+...+(-1)^p)=0\\ &\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2x_k^{p-1}+...+(-1)^p=0.\end{aligned}$$

Les p nombres deux à deux distincts x_k sont racines de l'équation de degré p : $z^p - C_{2p}^2z^{p-1}+...+(-1)^p=0$ qui est de degré p. On en déduit que

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1}x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2ème cas. Si n est impair, posons $n=2p+1$, $p\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)}+\frac{k\pi}{2p+1})+\text{cotan}^2\frac{\pi}{2}+\sum_{k=p+1}^{2p}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)}+\frac{k\pi}{2p+1})\\ &= 2\sum_{k=0}^{p-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)}+\frac{k\pi}{2p+1})\end{aligned}$$

La même démarche amène alors à $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$.

Dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\text{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}) = n(n-1).$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour tout réel a,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i\sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} C_{2p+1}^{j} \cos^{2p+1-j} a (i\sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \mathrm{Im}(e^{i(2p+1)a}) = \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} a (-1)^j \sin^{2j+1} a.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, en posant $a = \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de $(*)$ par $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} \operatorname{cotan}^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Or, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan}^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.
Ces p nombres deux à deux distintcs sont racines du polynôme $P = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^{3}}{C_{2p+1}^{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} (1 + \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2. Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite (un) est strictement croissante. De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3. Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. f et g sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1 - \cos x$ et $g'(x) = \tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc strictement croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
Donc, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 < \sin x < x < \tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 < \operatorname{cotan} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

4. Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 < \text{cotan}\,\frac{k\pi}{2p+1} < \frac{2p+1}{k\pi} < \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$. Puis, $\text{cotan}^2\,\frac{k\pi}{2p+1} < (\frac{(2p+1)^2}{\pi^2})\frac{1}{k^2} < \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\,\frac{k\pi}{2p+1} < u_p = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

$X^6-7X^4+8X^3-7X+7 = (X^6+8X^3+7)-(7X^4+7X) = (X^3+1)(X^3+7)-7X(X^3+1) = (X^3+1)(X^3-7X+7)$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7 = 3X^2(X^3+1)-7(X^3+1) = (X^3+1)(3X^2-7)$. Donc,

$$(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7) = (X^3+1)((X^3-7X+7)\wedge(3X^2-7)).$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3 - 7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})+7 = -(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+7 \neq 0$.
Les polynômes (X^3-7X+7) et $(3X^2-7)$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ et sont donc premiers entre eux. Donc, $(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7) = X^3+1$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X])\\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.\end{aligned}$$

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.
En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z})\cup(5+6\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels.
Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.
Tout d'abord, pour tout réel x, $\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinomes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)
Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geqslant 0)$.
Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} P(x) \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$. Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Correction de l'exercice 8 ▲

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair.
Sinon, posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Mais, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \dots + X^{k-1})$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Posons $P = \sum_{i=0}^{l} a_i X_i$ où $l \geqslant 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$.

$$P(n+km) = \sum_{i=0}^{l} a_i(n+km)^i = \sum_{i=0}^{l} a_i(n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^{l} a_i n^i + Km = m + Km = m(K+1),$$

   où K est un entier relatif. $P(n+km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier.
   Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geqslant 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k, $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Déjà, P_0 est dans E.
   Soit n un naturel non nul. $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)\dots(X+n)$ et donc, si k est élément de $\{-1,\dots,-n\}$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.
   Si k est un entier positif, $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = C_{n+k}^{n} \in \mathbb{Z}$.
   Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = (-1)^n\frac{1}{n!}(-k-1)\dots(-k-n) = (-1)^n C_{-k-1}^{n} \in \mathbb{Z}.$$

   Ainsi, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P_(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Evident
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).
   Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n, $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non nul ayant un degré n, s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k).

Soit $n = \deg P$.

Il existe $n+1$ nombres complexes a_0,..., a_n tels que $P = a_0P_0 + ... + a_nP_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.

L'égalité $P(-1)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : a_0 est dans $\mathbb{Z}$.

L'égalité $P(-2)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - a_1$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_1 est dans $\mathbb{Z}$.

L'égalité $P(-3)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_2 est dans $\mathbb{Z}$...

L'égalité $P(-(k+1))$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k$ est dans $\mathbb{Z}$ et si par hypothèse de récurrence, a_0,..., a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.

Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k.

Correction de l'exercice 11 ▲

On prend $n \geqslant 2$ (sinon tout est clair).

$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0.Q$.

2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} P(e^{ia}) &= \sin a(\cos(na) + i\sin(na)) - \sin(na)(\cos a + i\sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na)\cos a - \cos(na)\sin a) = 0. \end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P. P est donc divisible par Q.

$$\begin{aligned} P &= P - P(e^{ia}) = \sin a(X^n - e^{ina}) - \sin(na)(X - e^{ia}) = (X - e^{ia})(\sin a \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} e^{ika} - \sin(na)) \\ &= (X - e^{ia})S. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a \sum_{k=0}^{n-1} e^{ika}(X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}) = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} e^{ika}(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{-ija}) \\ &= \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2}(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{i(k-j)a}) = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a}) X^{n-2-l} \\ &= \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)a}) X^{n-2-l} \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)} a = e^{-ila} \frac{1 - e^{2i(l+1)a}}{1 - e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a} X^{n-2-l} = (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \sin((l+1)a) X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X - e^{ia})(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a) X^{n-2-k} = (X^2 - 2X\cos a + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a).$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit P un polynôme de degré n supèrieur ou égal à 2.
Posons $P=\lambda(X-z_1)(X-z_2)...(X-z_n)$ où λ est un complexe non nuls et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P'=\lambda\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i}(X-z_j))=\sum_{i=1}^{n}\frac{P}{X-z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0=\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{z-z_i}}{|z-z_i|^2}.$$

En posant $\lambda_i=\frac{1}{|z-z_i|^2}$, ($\lambda_i$ est un réel strictement positif) et en conjugant, on obtient $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z-z_i)=0$ et donc

$$z=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\mathrm{bar}(z_1(\lambda_1),...,z_n(\lambda_n)).$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On suppose que $n=\deg P\geqslant 1$.
On pose $P=\lambda(X-z_1)(X-z_2)...(X-z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.
D'après l'exercice précédent, $\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-z_k}$.
Si P est divisible par P', $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}/\ P=(aX+b)P'$ et donc $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}/\ \frac{P'}{P}=\frac{1}{aX+b}$ ce qui montre que la fraction rationelle $\frac{P'}{P}$ a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les z_k sont confondus.
En résumé, si P' divise P, $\exists(a,\lambda)\in\mathbb{C}^2/\ P=\lambda(X-a)^n$ et $\lambda\neq 0$.
Réciproquement, si $P=\lambda(X-a)^n$ avec $\lambda\neq 0$, alors $P'=n\lambda(X-a)^{n-1}$ divise P.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P+10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)'=P'$ d'ordre au moins deux.
De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P'=\lambda(X-2)^2(X+2)^2=\lambda(X^2-4)^2=\lambda(X^4-8X^2+16)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2/\ P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)+\mu \text{ avec } \lambda\neq 0.$$

Réciproquement, soit $P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)+\mu$ avec $\lambda\neq 0$.

P solution $\Leftrightarrow P+10$ divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ est divisible par $(X-2)^3$

$\Leftrightarrow P(-2)+10=0=P'(-2)=P''(-2)$ et $P(2)+10=0=P'(2)=P''(2) \Leftrightarrow P(-2)=-10$ et $P(2)=10$

$\left\{\begin{array}{l}\lambda(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32)+\mu=-10\\ \lambda(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+\mu=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \mu=0$ et $\lambda(\dfrac{32}{5}-\dfrac{64}{3}+32)+\mu=10$

$\Leftrightarrow \mu=0$ et $\lambda=\dfrac{75}{128}$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P=\frac{75}{128}(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)=\frac{15}{128}X^5-\frac{25}{16}X^3+\frac{75}{8}X$.

Correction de l'exercice 15 ▲

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont clairement 0 et 1.
Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.
Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Alors, a^2, a^4, a^8..., sont encore racines de P. Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $(a^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a=0$ ou $|a|=1$ car si $|a|\in]0,1[\cap]1,+\infty[$, la suite $(|a^{2^n}|)$ est strictement monotone et en particulier les a^{2^n} sont deux à deux distincts.
De même, si a est racine de P alors $(a-1)^2$ l'est encore mais aussi $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., ce qui impose $a=1$ ou $|a-1|=1$.
En résumé,

$$(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) \Rightarrow ((a=0 \text{ ou } |a|=1) \text{ et } (a=1 \text{ ou } |a-1|=1)) \Rightarrow (a=0 \text{ ou } a=1 \text{ ou } |a|=|a-1|=1).$$

Maintenant, $|a|=|a-1|=1 \Leftrightarrow |a|=1$ et $|a|=|a-1| \Leftrightarrow a\in\mathscr{C}((0,0),1)\cap \mathrm{med}[(0,0),(1,0)]=\{-j,-j^2\}$.
Donc, si $P\in\mathbb{R}[X]$ est solution, il existe K, α, β, γ, K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma$ ($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité).
Réciproquement, si $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma=KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$P(X^2)=KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X4-X^2+1)^\gamma=KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma,$$

et

$$\begin{aligned}P(X)P(X+1)&=KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma\\&=K^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha(X^2-X+1)^\gamma(X^2+X+1)^\gamma.\end{aligned}$$

Par unicité de la décompôsition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P=0$ ou $K=1$ et $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$.
Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2-X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Correction de l'exercice 16 ▲

a est solution du problème si et seulement si $X^5-209X+a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2+\alpha X+1$. Mais

$$X^5-209X+a=(X^2+\alpha X+1)(X^3-\alpha X^2+(\alpha^2-1)X-(\alpha^3-2\alpha))+(\alpha^4-3\alpha^2-208)X+a+(\alpha^3-2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{C}/\left\{\begin{array}{l}\alpha^4-3\alpha^2-208=0\\ a=-\alpha^3+2\alpha\end{array}\right.$. Mais, $\alpha^4-3\alpha^2-208=0\Leftrightarrow\alpha^2\in\{-13,16\}\Leftrightarrow \alpha\in\{-4,4,i\sqrt{13},-i\sqrt{13}\}$ et la deuxième équation fournit $a\in\{56,-56,15i\sqrt{13},-15i\sqrt{13}\}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

On note que $P(1)=1\neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k+2}{a_k-1}=\sum_{k=1}^{5}(1+\frac{3}{a_k-1})=5-3\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{1-a_k}=5-3\frac{P'(1)}{P(1)}=5-3\frac{12}{1}=-31.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1.

$$S\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ \frac{xy+xz+yz}{xyz}=1\\ xyz=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\sigma_1=1,\ \sigma_2=\sigma_3=-4$$

$\Leftrightarrow x,\ y$ et z sont les trois solutions de l'équation $X^3-X^2-4X+4=0$

$\Leftrightarrow x,\ y$ et z sont les trois solutions de l'équation $(X-1)(X-2)(X+2)=0$

$\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\}$

2. Pour $1\leqslant k\leqslant 4$, posons $S_k=x^k+y^k+z^k+t^k$. On a $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$. Calculons S_3 en fonction des σ_k. On a $\sigma_1^3=S_3+3\sum x^2y+6\sum xyz=S_3+3\sum x^2y+6\sigma_3$ $(*)$. Mais on a aussi $S_1S_2=S_3+\sum x^2y$. Donc, $\sum x^2y=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-S_3$. En reportant dans $(*)$, on obtient $\sigma_1^3=S_3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3$ et donc,

$$S_3=\frac{1}{2}(-\sigma_1^3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Calculons S_3 en fonction des σ_k. Soit $P=(X-x)(X-y)(X-z)(X-t)=X^4-\sigma_1X^3+\sigma_2X^2-\sigma_3X+\sigma_4$.

$$\begin{aligned}P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=0&\Leftrightarrow S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2-\sigma_3S_1+4\sigma_4=0\\&\Leftrightarrow S_4=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4\\&\Leftrightarrow S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$S\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=0\\ -2\sigma_2=10\\ 3\sigma_3=0\\ 2\sigma_2^2-4\sigma_4=26\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=0\\ \sigma_2=-5\\ \sigma_3=0\\ \sigma_4=6\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x,\ y,\ z,$ et t sont les 4 solutions de l'équation $X^4-5X^2+6=0$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t)$ est l'une des 24 permutations du quadruplet $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3})$

Correction de l'exercice 19 ▲

Le polynôme nul est solution. Soit P un polynôme non nul de degré n solution alors $n=n-1+n-2$ et donc $n=3$. Posons donc $P=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}P(2X)=P'(X)P''(X)&\Leftrightarrow 8aX^3+4bX^2+2cX+d=(3aX^2+2bX+c)(6aX+2b)\\&\Leftrightarrow(18a^2-8a)X^3+(18ab-4b)X^2+(4b^2+6ac-2c)X+2bc-d=0\\&\Leftrightarrow 18a^2-8a=18ab-4b=4b^2+6ac-2c=2bc-d=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{4}{9}\text{ et }b=c=d=0.\end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Correction de l'exercice 20 ▲

0 n'est pas racine de P.

On rappelle que si $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$) est racine de P, alors p divise le coefficient constant de P et q divise son coefficient dominant. Ici, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et q est élément de $\{1,2,3,4,6,12\}$ ou encore r est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}\}$.

Réciproquement, on trouve $P(\frac{2}{3}) = P(\frac{1}{4}) = 0$. P est donc divisible par

$$12(X-\frac{2}{3})(X-\frac{1}{4}) = (3X-2)(4X-1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Plus précisément, $P = (12X^2-11X+2)(X^2+X+2) = (3X-2)(4X-1)(X - \frac{-1+i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$.

Correction de l'exercice 21 ▲

Pour $n \geqslant 0$, posons $P_n = (X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n(\frac{1}{2}) = 0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X-1)(2X-1) = 2X^3 - 3X^2 + X$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le quotient est nul. Si $n = 2$, le quotient vaut -2.

Soit $n \geqslant 3$. On met succesivement $2X-1$ puis $X-1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned}
P_n &= ((X-1)^2)^n - (X^2)^n + (2X-1) = ((X-1)2 - X2)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + (2X-1)\\
&= (2X-1)(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1) = (2X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2})\\
&= (2X-1)(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - (X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k)\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1}X^k)\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-1}X^k - 1 - (X-1)^{2n-3})\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^k - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^k)\\
&= X(2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^{k-1})
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

$$\begin{aligned}
1 = (X+(1-X))^{n+m-1} &= \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= (1-X)^m\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n-1-k} + X^n\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. De plus, pour $n \leqslant k \leqslant n+m-1$, $\deg(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\deg(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.