



## Polynômes

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*I

---

Calculer  $a_n = \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$ ,  $b_n = \prod_{k=1}^n \cos(a + \frac{k\pi}{n})$  et  $c_n = \prod_{k=1}^n \tan(a + \frac{k\pi}{n})$  en éliminant tous les cas particuliers concernant  $a$ .

[Correction ▼](#)

[005313]

### Exercice 2 \*\*\*

---

On pose  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$  et  $Q = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1}$ . Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$ .

[Correction ▼](#)

[005314]

### Exercice 3 \*\*\*

---

Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} \cotan^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) = n(n-1)$ . (Indication. Poser  $x_k = \cotan^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$  puis trouver un polynôme dont les  $x_k$  sont les racines.)

[Correction ▼](#)

[005315]

### Exercice 4 \*\*\*\*I

---

- Soient  $p$  un entier naturel et  $a$  un réel. Donner le développement de  $(\cos a + i \sin a)^{2p+1}$  puis en choisissant astucieusement  $a$ , déterminer  $\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ . En déduire alors  $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$ .
- Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge (pour majorer  $u_n$ , on remarquera que  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ ).
- Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ .
- En déduire un encadrement de  $u_n$  puis la limite de  $(u_n)$ .

[Correction ▼](#)

[005316]

### Exercice 5 \*\*IT

---

Déterminer le PGCD de  $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$  et  $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$ .

[Correction ▼](#)

[005317]

### Exercice 6 \*\*T

---

Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  le polynôme  $(X+1)^n - X^n - 1$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  ?

[Correction ▼](#)

[005318]

### Exercice 7 \*\*\*

---

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ . Montrer qu'il existe deux polynômes  $R$  et  $S$  à coefficients réels tels que  $P = R^2 + S^2$ .

**Exercice 8 \*\***

Soit  $P$  un polynôme différent de  $X$ . Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

Correction ▼

[005320]

**Exercice 9 \*\*\***

Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit  $n$  un entier relatif et  $m = P(n)$ .

1. Montrer que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(n + km)$  est un entier divisible par  $m$ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que  $P(n)$  soit premier pour tout entier  $n$ .

Correction ▼

[005321]

**Exercice 10 \*\*\* Polynômes  $P$  vérifiant  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$** 

Soit  $E$  la partie de  $\mathbb{C}[X]$  formée des polynômes  $P$  vérifiant  $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,  $P(a) \in \mathbb{Z}$ .

1. On pose  $P_0 = 1$  et pour  $n$  entier naturel non nul,  $P_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (X + k)$  (on peut définir la notation  $P_n = C_{X+n}$ ). Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n \in E$ .
2. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des  $P_n$  est encore un élément de  $E$ .
3. Montrer que  $E$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $P_n$ .

Correction ▼

[005322]

**Exercice 11 \*\*\***

Division euclidienne de  $P = \sin aX^n - \sin(na)X + \sin((n-1)a)$  par  $Q = X^2 - 2X \cos a + 1$ ,  $a$  réel donné.

Correction ▼

[005323]

**Exercice 12 \*\*\*\*I Théorème de LUCAS**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de  $P'$  sont barycentres à coefficients positifs des racines de  $P$  (on dit que les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ ). Indication : calculer  $\frac{P'}{P}$ .

Correction ▼

[005324]

**Exercice 13 \*\*\***

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Correction ▼

[005325]

**Exercice 14 \*\*\*T**

Trouver un polynôme de degré 5 tel que  $P(X) + 10$  soit divisible par  $(X + 2)^3$  et  $P(X) - 10$  soit divisible par  $(X - 2)^3$ .

Correction ▼

[005326]

**Exercice 15 \*\*\*I**

Trouver les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$  (penser aux racines de  $P$ ).

Correction ▼

[005327]

**Exercice 16 \*\*T**

---

Déterminer  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $P = X^5 - 209X + a$  admette deux zéros dont le produit vaut 1.

[Correction ▼](#)

[005328]

---

**Exercice 17** \*\*\*T

Soit  $(a_k)_{1 \leq k \leq 5}$  la famille des racines de  $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$ . Calculer  $\sum_{k=1}^5 \frac{a_k+2}{a_k-1}$ .

[Correction ▼](#)

[005329]

---

**Exercice 18** \*\*

Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$  (resp.  $\mathbb{C}^4$ ) le système :

$$1) \begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26 \end{cases} .$$

[Correction ▼](#)

[005330]

---

**Exercice 19** \*\*T

Trouver tous les polynômes  $P$  vérifiant  $P(2X) = P'(X)P''(X)$ .

[Correction ▼](#)

[005331]

---

**Exercice 20** \*\*

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $12X^4 + X^3 + 15X^2 - 20X + 4$ .

[Correction ▼](#)

[005332]

---

**Exercice 21** \*\*\*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $(X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$  est divisible par  $2X^3 - 3X^2 + X$  puis déterminer le quotient.

[Correction ▼](#)

[005333]

---

**Exercice 22** \*\*I

Déterminer deux polynômes  $U$  et  $V$  vérifiant  $UX^n + V(1-X)^m = 1$  et  $\deg(U) < m$  et  $\deg(V) < n$ .

[Correction ▼](#)

[005334]

---

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $n \geq 2$ . On a

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i} (e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2} (e^{i\pi/2})^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc  $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Il reste à calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n})$ .

**1ère solution.** Les  $e^{-2ik\pi/n}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , sont les  $n-1$  racines  $n$ -ièmes de 1 distinctes de 1 et puisque  $X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$ , ce sont donc les  $n-1$  racines deux à deux distinctes du polynôme  $1+X+\dots+X^{n-1}$ . Par suite,  $1+X+\dots+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{-2ik\pi/n})$ , et en particulier  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1+1+\dots+1 = n$ .

**2ème solution.** Pour  $1 \leq k \leq n-1$ , posons  $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$ . Les  $z_k$  sont deux à deux distincts et racines du polynôme  $P = (1-X)^n - 1 = -X + \dots + (-1)^n X^n = X(-n+X - \dots + (-1)^n X^{n-1})$ . Maintenant,  $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$  (ce qui n'est pas pour  $1 \leq k \leq n-1$ ). Donc, les  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , sont  $n-1$  racines deux à deux distinctes du polynôme de degré  $n-1$  :  $-n+X - \dots + (-1)^n X^{n-1}$ . Ce sont ainsi toutes les racines de ce polynôme ou encore

$$-n+X - \dots + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k).$$

En particulier, en égalant les coefficients constants,

$$(-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} z_k = -n,$$

et donc encore une fois  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}) = n$ .

Finalement,

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$b_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} (e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} + e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=1}^n (e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1).$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^n e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{-ina} e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+n)} = e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

D'autre part, soit  $P = \prod_{k=1}^n (X + e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \prod_{k=1}^n (X - (-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$ . Pour tout  $k$ , on a  $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})})^n = (-1)^n e^{2ina}$ . Par suite, les  $n$  nombres deux à deux distincts  $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}$ ,  $1 \leq k \leq n$  sont racines du polynôme  $X^n - (-1)^n e^{2ina}$ , de degré  $n$ . On en déduit que,  $P = X^n - (-1)^n e^{2ina}$ .

Par suite,  $\prod_{k=1}^n (e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1) = P(1) = 1 - (-1)^n e^{2ina} = 1 - e^{2ina+n\pi}$ , puis

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2^n} e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2} (1 - e^{2ina+n\pi}) = \frac{1}{2^n} (e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} - e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})}) \\ &= \frac{1}{2^n} (e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}) = \frac{\cos(na + (n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

3.

$$c_n \text{ est défini} \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, a + \frac{k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a - \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \notin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour les  $a$  tels que  $c_n$  est défini, on a  $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{i} \frac{e^{2i(a+k\pi/n)} - 1}{e^{2i(a+k\pi/n)} + 1}$ .

Pour  $1 \leq k \leq n$ , posons  $\omega_k = e^{2i(a+k\pi/n)}$  puis  $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$ . On a donc  $c_n = \frac{1}{i^n} \prod_{k=1}^n z_k$ .

Puisque  $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$ , on a  $\omega_k(1 - z_k) = 1 + z_k$  et donc, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $\omega_k^n(1 - z_k)^n = (1 + z_k)^n$  ou encore, les  $z_k$  sont racines du polynôme  $P = (1 + X)^n - e^{2ina}(1 - X)^n$ . Maintenant, les  $a + \frac{k\pi}{n}$  sont dans  $[a, a + \pi[$  et donc deux à deux distincts puisque la fonction tangente est injective sur tout intervalle de cette forme.

1er cas. Si  $e^{2ina} \neq (-1)^n$  alors  $P$  est de degré  $n$  et  $P = (1 - (-1)^n e^{2ina}) \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ . En évaluant en 0, on obtient

$$(1 - (-1)^n e^{2ina}) \prod_{k=1}^n (-z_k) = 1 - e^{2ina}.$$

D'où,

$$\prod_{k=1}^n z_k = \frac{1 - e^{2ina}}{(-1)^n - e^{2ina}} = \frac{1 - e^{2ina}}{e^{in\pi} - e^{2ina}} = \frac{e^{ina}}{e^{in\pi/2} e^{ina}} \frac{-2i \sin(na)}{-2i \sin n(a - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n} \frac{\sin(na)}{\sin n(a - \frac{\pi}{2})}.$$

Finalement,  $c_n = (-1)^n \frac{\sin(na)}{\sin n(a - \frac{\pi}{2})}$ .

Si  $n$  est pair, posons  $n = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .  $c_n = c_{2p} = \frac{\sin(2pa)}{\sin(2pa - p\pi)} = (-1)^p$ .

Si  $n$  est impair, posons  $n = 2p + 1$ .  $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p + 1)a)$ .

2ème cas. Si  $e^{2ina} = (-1)^n$ , alors  $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$  ou encore  $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . Dans ce cas,  $c_n$  n'est pas défini.

## Correction de l'exercice 2 ▲

Tout d'abord

$$Q = (1 + X + \dots + X^n)' = \left( \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1} \right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - X^{n+1}}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite,  $\omega_0 = 1$  et donc,  $Q(\omega_0) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Puis, pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\omega_k \neq 1$  et donc, puisque  $\omega_k^n = 1$ ,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2 \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1)}.$$

Mais,  $X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$  et d'autre part  $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$ . Par intégrité de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$  (Une autre rédaction possible est :  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $(z -$

1)  $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = (z-1)(1+z+\dots+z^{n-1})$  et donc  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = 1+z+\dots+z^{n-1}$  et finalement  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = 1+z+\dots+z^{n-1}$  car les deux polynômes ci-contre coïncident en une infinité de valeurs de  $z$ .)

En particulier,  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} = n$  ou encore  $\prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1) = (-1)^{n-1} n$ . Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

Il faut prendre garde au fait que les nombres  $x_k = \cotan^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

1er cas. Si  $n$  est pair, posons  $n = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) + \sum_{k=p}^{2p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}\right) \end{aligned}$$

Or,  $\cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}\right) = \cotan^2\left(\pi - \frac{\pi}{4p} - \frac{k\pi}{2p}\right) = \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$  et donc  $S_n = 2 \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$ .

Mais cette fois ci,

$$0 \leq k \leq p-1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p} \leq \frac{\pi}{4p} + \frac{(p-1)\pi}{2p} = \frac{(2p-1)\pi}{4p} < \frac{2p\pi}{4p} = \frac{\pi}{2}.$$

et comme, la fonction  $x \mapsto \cotan^2 x$  est strictement décroissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , les  $x_k$ ,  $0 \leq k \leq p-1$ , sont deux à deux distincts.

Pour  $0 \leq k \leq p-1$ , posons  $y_k = \cotan\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$ .

$$\begin{aligned} y_k &= i \frac{e^{(2k+1)i\pi/4p} + 1}{e^{(2k+1)i\pi/4p} - 1} \Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p} (y_k - i) = y_k + i \\ &\Rightarrow (y_k + i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi} (y_k - i)^{2p} = (-1)^{2k+1} (y_k - i)^{2p} = -(y_k - i)^{2p} \\ &\Rightarrow (y_k + i)^{2p} + (y_k - i)^{2p} = 0 \Rightarrow 2(y_k^{2p} - C_{2p}^2 y_k^{2p-2} + \dots + (-1)^p) = 0 \\ &\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2 x_k^{p-1} + \dots + (-1)^p = 0. \end{aligned}$$

Les  $p$  nombres deux à deux distincts  $x_k$  sont racines de l'équation de degré  $p$  :  $z^p - C_{2p}^2 z^{p-1} + \dots + (-1)^p = 0$  qui est de degré  $p$ . On en déduit que

$$S_n = 2 \sum_{k=0}^{p-1} x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2ème cas. Si  $n$  est impair, posons  $n = 2p+1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) + \cotan^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \end{aligned}$$

La même démarche amène alors à  $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$ .

Dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n(n-1).$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour tout réel  $a$ ,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i \sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} C_{2p+1}^j \cos^{2p+1-j} a (i \sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \text{Im}(e^{i(2p+1)a}) = \sum_{j=0}^p C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} a (-1)^j \sin^{2j+1} a.$$

Pour  $1 \leq k \leq p$ , en posant  $a = \frac{k\pi}{2p+1}$ , on obtient :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=0}^p C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour  $1 \leq k \leq p$ ,  $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$ . En divisant les deux membres de (\*) par  $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$ , on obtient :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} \cotan^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les  $p$  nombres  $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$  sont deux à deux distincts. En effet, pour  $1 \leq k \leq p$ ,  $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ . Or, sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $x \mapsto \cotan x$  est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction  $x \mapsto \cotan^2 x$  est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces  $p$  nombres deux à deux distincts sont racines du polynôme  $P = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$ , qui est de degré  $p$ . Ce sont donc toutes les racines de  $P$  (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^3}{C_{2p+1}^1} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^p \left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2. Pour  $n$  entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite  $(u_n)$  est strictement croissante. De plus, pour  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite  $(u_n)$  est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite  $(u_n)$  converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3. Pour  $x$  élément de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , posons  $f(x) = x - \sin x$  et  $g(x) = \tan x - x$ .  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et pour  $x$  élément de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = 1 - \cos x$  et  $g'(x) = \tan^2 x$ .  $f'$  et  $g'$  sont strictement positives sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc strictement croissantes sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Comme  $f(0) = g(0) = 0$ , on en déduit que  $f$  et  $g$  sont strictement positives sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Donc,  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $0 < \sin x < x < \tan x$  et par passage à l'inverse  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $0 < \cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ .

4. Pour  $1 \leq k \leq p$ ,  $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $0 < \cotan \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{2p+1}{k\pi} < \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2p+1}}$ . Puis,  $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \left( \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \right) \frac{1}{k^2} < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$ . En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < u_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers  $\frac{\pi^2}{6}$  quand  $p$  tend vers l'infini et donc la suite  $(u_p)$  tend vers  $\frac{\pi^2}{6}$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

$X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 = (X^6 + 8X^3 + 7) - (7X^4 + 7X) = (X^3 + 1)(X^3 + 7) - 7X(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(X^3 - 7X + 7)$  et  $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7 = 3X^2(X^3 + 1) - 7(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(3X^2 - 7)$ . Donc,

$$(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = (X^3 + 1)((X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^2 - 7)).$$

Maintenant, pour  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3 - 7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}) + 7 = -(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}) + 7 \neq 0$ .

Les polynômes  $(X^3 - 7X + 7)$  et  $(3X^2 - 7)$  n'ont pas de racines communes dans  $\mathbb{C}$  et sont donc premiers entre eux. Donc,  $(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = X^3 + 1$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} (X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2 + X + 1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &\text{(car } (X+1)^n - X^n - 1 \text{ est dans } \mathbb{R}[X]) \\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0. \end{aligned}$$

Si  $n \in 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$ .

Si  $n \in 1 + 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$ .

Si  $n \in 2 + 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$ .

Si  $n \in 3 + 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$ .

Si  $n \in 4 + 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$ .

Si  $n \in 5 + 6\mathbb{Z}$ ,  $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$ .

En résumé,  $(X+1)^n - X^n - 1$  est divisible par  $X^2 + X + 1$  si et seulement si  $n$  est dans  $(1 + 6\mathbb{Z}) \cup (5 + 6\mathbb{Z})$ .



---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

Soit  $P$  un polynôme non nul à coefficients réels.

Pour tout réel  $x$ , on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j},$$

où  $\lambda$  est un réel non nul,  $k$  et  $l$  sont des entiers naturels, les  $a_i$  sont des réels deux à deux distincts, les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$  des entiers naturels et les  $(x - z_j)(x - \bar{z}_j)$  des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles. Tout d'abord, pour tout réel  $x$ ,  $\prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j} > 0$  (tous les trinômes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc,  $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\alpha_i} \geq 0)$ .

Ensuite, si  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \geq 0$  ce qui impose  $\lambda > 0$ . Puis, si un exposant  $\alpha_i$  est impair,  $P$  change de signe en  $a_i$ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur  $P$ . Donc,  $\lambda > 0$  et tous les  $\alpha_i$  sont pairs. Réciproquement, si  $\lambda > 0$  et si tous les  $\alpha_i$  sont pairs, alors bien sûr,  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ .

Posons  $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\alpha_i/2}$ .  $A$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$  car  $\lambda > 0$  et car les  $\alpha_i$  sont des entiers pairs. Posons ensuite  $Q_1 = \prod_{j=1}^l (x - z_j)^{\beta_j}$  et  $Q_2 = \prod_{j=1}^l (x - \bar{z}_j)^{\beta_j}$ .  $Q_1$  admet après développement une écriture de la forme  $Q_1 = B + iC$  où  $B$  et  $C$  sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors,  $Q_2 = B - iC$ . Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2 (B + iC)(B - iC) = A^2 (B^2 + C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où  $R$  et  $S$  sont des polynômes à coefficients réels.

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

Si  $P$  est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair.

Sinon, posons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Mais, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $(P(X))^k - X^k = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \dots + X^{k-1})$  est divisible par  $P(X) - X$  et il en est donc de même de  $P(P(X)) - X$ .

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. Posons  $P = \sum_{i=0}^l a_i X^i$  où  $l \geq 1$  et où les  $a_i$  sont des entiers relatifs avec  $a_l \neq 0$ .

$$P(n + km) = \sum_{i=0}^l a_i (n + km)^i = \sum_{i=0}^l a_i (n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^l a_i n^i + Km = m + Km = m(K + 1),$$

où  $K$  est un entier relatif.  $P(n + km)$  est donc un entier relatif multiple de  $m = P(n)$ .

2. Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$  est premier.

Soit  $n$  un entier naturel donné et  $m = P(n)$  (donc,  $m \geq 2$  et en particulier  $m \neq 0$ ). Pour tout entier relatif  $k$ ,  $P(n + km)$  est divisible par  $m$  mais  $P(n + km)$  est un nombre premier ce qui impose  $P(n + km) = m$ . Par suite, le polynôme  $Q = P - m$  admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque  $m \neq 0$ ) et est donc le polynôme nul ou encore  $P$  est constant.

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

---

1. Déjà,  $P_0$  est dans  $E$ .

Soit  $n$  un naturel non nul.  $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)\dots(X+n)$  et donc, si  $k$  est élément de  $\{-1, \dots, -n\}$ ,  $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$ .

Si  $k$  est un entier positif,  $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = C_{n+k}^n \in \mathbb{Z}$ .

Enfin, si  $k$  est un entier strictement plus petit que  $-n$ ,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)\dots(-k-n) = (-1)^n C_{-k-1}^n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(k) \in \mathbb{Z}$ , ou encore  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

2. Evident

3. Soit  $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$  tel que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(k) \in \mathbb{Z}$  (si  $P$  est nul,  $P$  est combinaison linéaire à coefficients entiers des  $P_k$ ).

Puisque  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_k) = k$ , on sait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$  et donc,  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$  (tout polynôme non nul ayant un degré  $n$ , s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des  $P_k$ ).

Soit  $n = \deg P$ .

Il existe  $n+1$  nombres complexes  $a_0, \dots, a_n$  tels que  $P = a_0 P_0 + \dots + a_n P_n$ . Il reste à montrer que les  $a_i$  sont des entiers relatifs.

L'égalité  $P(-1)$  est dans  $\mathbb{Z}$ , fournit :  $a_0$  est dans  $\mathbb{Z}$ .

L'égalité  $P(-2)$  est dans  $\mathbb{Z}$ , fournit :  $a_0 - a_1$  est dans  $\mathbb{Z}$  et donc  $a_1$  est dans  $\mathbb{Z}$ .

L'égalité  $P(-3)$  est dans  $\mathbb{Z}$ , fournit :  $a_0 - 2a_1 + a_2$  est dans  $\mathbb{Z}$  et donc  $a_2$  est dans  $\mathbb{Z}$ ...

L'égalité  $P(-(k+1))$  est dans  $\mathbb{Z}$ , fournit :  $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^k a_k$  est dans  $\mathbb{Z}$  et si par hypothèse de récurrence,  $a_0, \dots, a_{k-1}$  sont des entiers relatifs alors  $a_k$  l'est encore.

Tous les coefficients  $a_k$  sont des entiers relatifs et  $E$  est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $P_k$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

---

On prend  $n \geq 2$  (sinon tout est clair).

$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$  est à racines simples si et seulement si  $e^{ia} \neq e^{-ia}$  ou encore  $e^{2ia} \neq 1$  ou enfin,  $a \notin \pi\mathbb{Z}$ .

1er cas. Si  $a \in \pi\mathbb{Z}$  alors,  $P = 0 = 0 \cdot Q$ .

2ème cas. Si  $a \notin \pi\mathbb{Z}$ , alors

$$\begin{aligned} P(e^{ia}) &= \sin a (\cos(na) + i \sin(na)) - \sin(na) (\cos a + i \sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na) \cos a - \cos(na) \sin a) = 0. \end{aligned}$$

Donc,  $e^{ia}$  est racine de  $P$  et de même, puisque  $P$  est dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $e^{-ia}$  est racine de  $P$ .  $P$  est donc divisible par  $Q$ .

$$\begin{aligned} P &= P - P(e^{ia}) = \sin a (X^n - e^{ina}) - \sin(na) (X - e^{ia}) = (X - e^{ia}) \left( \sin a \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} e^{ika} - \sin(na) \right) \\ &= (X - e^{ia}) S. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a \sum_{k=0}^{n-1} e^{ika} (X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}) = \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} e^{ika} \left( \sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{-ija} \right) \\
&= \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \left( \sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{i(k-j)a} \right) = \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \left( \sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a} \right) X^{n-2-l} \\
&= \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \left( \sum_{k=0}^l e^{i(2k-l)a} \right) X^{n-2-l}
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^l e^{i(2k-l)a} = e^{-ila} \frac{1 - e^{2i(l+1)a}}{1 - e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a} X^{n-2-l} = (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \sin((l+1)a) X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X - e^{ia})(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a) X^{n-2-k} = (X^2 - 2X \cos a + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a).$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  supérieur ou égal à 2.

Posons  $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$  où  $\lambda$  est un complexe non nul et les  $z_k$  des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} (X - z_j) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{P}{X - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - z_i}.$$

Soit alors  $z$  une racine de  $P'$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $z$  est racine de  $P$  (et donc racine de  $P$  d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z - z_i}}{|z - z_i|^2}.$$

En posant  $\lambda_i = \frac{1}{|z - z_i|^2}$ , ( $\lambda_i$  est un réel strictement positif) et en conjuguant, on obtient  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(z - z_i) = 0$  et donc

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \text{bar}(z_1(\lambda_1), \dots, z_n(\lambda_n)).$$

### Correction de l'exercice 13 ▲

On suppose que  $n = \deg P \geq 1$ .

On pose  $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$  où  $\lambda$  est un complexe non nul et les  $z_k$  sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

D'après l'exercice précédent,  $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}$ .

Si  $P$  est divisible par  $P'$ ,  $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / P = (aX + b)P'$  et donc  $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$  ce qui montre que la fraction rationnelle  $\frac{P'}{P}$  a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les  $z_k$  sont confondus.

En résumé, si  $P'$  divise  $P$ ,  $\exists(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2 / P = \lambda(X - a)^n$  et  $\lambda \neq 0$ .

Réciproquement, si  $P = \lambda(X - a)^n$  avec  $\lambda \neq 0$ , alors  $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$  divise  $P$ .

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme  $\lambda(X - a)^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

### Correction de l'exercice 14 ▲

Soit  $P$  un tel polynôme.  $-2$  est racine de  $P + 10$  d'ordre au moins trois et donc racine de  $(P + 10)' = P'$  d'ordre au moins deux.

De même,  $2$  est racine de  $P'$  d'ordre au moins deux et puisque  $P'$  est de degré 4, il existe un complexe  $\lambda$  tel que  $P' = \lambda(X - 2)^2(X + 2)^2 = \lambda(X^2 - 4)^2 = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$  et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit  $P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu$  avec  $\lambda \neq 0$ .

$P$  solution  $\Leftrightarrow P + 10$  divisible par  $(X + 2)^3$  et  $P - 10$  est divisible par  $(X - 2)^3$

$$\Leftrightarrow P(-2) + 10 = 0 = P'(-2) = P''(-2) \text{ et } P(2) + 10 = 0 = P'(2) = P''(2) \Leftrightarrow P(-2) = -10 \text{ et } P(2) = 10$$

$$\begin{cases} \lambda\left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) + \mu = -10 \\ \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + \mu = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + \mu = 10$$

$$\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir  $P = \frac{75}{128}\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) = \frac{15}{128}X^5 - \frac{25}{16}X^3 + \frac{75}{8}X$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont clairement 0 et 1.

Soit  $P$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$ .

Soit  $a$  une racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors,  $a^2, a^4, a^8, \dots$ , sont encore racines de  $P$ . Mais,  $P$  étant non nul,  $P$  ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite  $(a^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose  $a = 0$  ou  $|a| = 1$  car si  $|a| \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , la suite  $(|a^{2^n}|)$  est strictement monotone et en particulier les  $a^{2^n}$  sont deux à deux distincts.

De même, si  $a$  est racine de  $P$  alors  $(a - 1)^2$  l'est encore mais aussi  $(a - 1)^4, (a - 1)^8, \dots$ , ce qui impose  $a = 1$  ou  $|a - 1| = 1$ .

En résumé,

$$(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) \Rightarrow ((a = 0 \text{ ou } |a| = 1) \text{ et } (a = 1 \text{ ou } |a - 1| = 1)) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } |a| = |a - 1| = 1).$$

Maintenant,  $|a| = |a - 1| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$  et  $|a| = |a - 1| \Leftrightarrow a \in \mathcal{C}((0, 0), 1) \cap \text{med}[(0, 0), (1, 0)] = \{-j, -j^2\}$ .

Donc, si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est solution, il existe  $K, \alpha, \beta, \gamma, K$  complexe non nul et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  entiers naturels tels que  $P = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X + j)^\gamma(X + j^2)^\gamma$  ( $-j$  et  $-j^2$  devant avoir même ordre de multiplicité).

Réciproquement, si  $P = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X + j)^\gamma(X + j^2)^\gamma = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X^2 - X + 1)^\gamma$ .

$$P(X^2) = KX^{2\alpha}(X^2 - 1)^\beta(X^4 - X^2 + 1)^\gamma = KX^{2\alpha}(X - 1)^\beta(X + 1)^\beta(X^2 - \sqrt{3}X + 1)^\gamma(X^2 + \sqrt{3}X + 1)^\gamma,$$

et

$$\begin{aligned} P(X)P(X + 1) &= KX^\alpha(X - 1)^\beta(X^2 - X + 1)^\gamma K(X + 1)^\alpha X^\beta(X^2 + X + 1)^\gamma \\ &= K^2 X^{\alpha+\beta} (X - 1)^\beta (X + 1)^\alpha (X^2 - X + 1)^\gamma (X^2 + X + 1)^\gamma. \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul,  $P$  est solution si et seulement si  $P = 0$  ou  $K = 1$  et  $\alpha = \beta$  et  $\gamma = 0$ .

Les polynômes solutions sont 0 et les  $(X^2 - X)^\alpha$  où  $\alpha$  est un entier naturel quelconque.

### Correction de l'exercice 16 ▲

$a$  est solution du problème si et seulement si  $X^5 - 209X + a$  est divisible par un polynôme de la forme  $X^2 + \alpha X + 1$ . Mais

$$X^5 - 209X + a = (X^2 + \alpha X + 1)(X^3 - \alpha X^2 + (\alpha^2 - 1)X - (\alpha^3 - 2\alpha)) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208)X + a + (\alpha^3 - 2\alpha).$$

Donc  $a$  est solution  $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} / \begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha \end{cases}$ . Mais,  $\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\}$  et la deuxième équation fournit  $a \in \{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\}$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

On note que  $P(1) = 1 \neq 0$  et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^5 \frac{a_k + 2}{a_k - 1} = \sum_{k=1}^5 \left(1 + \frac{3}{a_k - 1}\right) = 5 - 3 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{1 - a_k} = 5 - 3 \frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3 \frac{12}{1} = -31.$$

### Correction de l'exercice 18 ▲

1.

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{xy + xz + yz}{xyz} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = -4$$

$\Leftrightarrow x, y$  et  $z$  sont les trois solutions de l'équation  $X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x, y$  et  $z$  sont les trois solutions de l'équation  $(X - 1)(X - 2)(X + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (1, -2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (-2, 1, 2), (-2, 2, 1)\}$

2. Pour  $1 \leq k \leq 4$ , posons  $S_k = x^k + y^k + z^k + t^k$ . On a  $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Calculons  $S_3$  en fonction des  $\sigma_k$ . On a  $\sigma_1^3 = S_3 + 3\sum x^2y + 6\sum xyz = S_3 + 3\sum x^2y + 6\sigma_3$  (\*). Mais on a aussi  $S_1S_2 = S_3 + \sum x^2y$ . Donc,  $\sum x^2y = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - S_3$ . En reportant dans (\*), on obtient  $\sigma_1^3 = S_3 + 3(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - S_3) + 6\sigma_3$  et donc,

$$S_3 = \frac{1}{2}(-\sigma_1^3 + 3(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - S_3) + 6\sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Calculons  $S_3$  en fonction des  $\sigma_k$ . Soit  $P = (X - x)(X - y)(X - z)(X - t) = X^4 - \sigma_1X^3 + \sigma_2X^2 - \sigma_3X + \sigma_4$ .

$$P(x) + P(y) + P(z) + P(t) = 0 \Leftrightarrow S_4 - \sigma_1S_3 + \sigma_2S_2 - \sigma_3S_1 + 4\sigma_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 - 4\sigma_4$$

$$\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Par suite,

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ -2\sigma_2 = 10 \\ 3\sigma_3 = 0 \\ 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -5 \\ \sigma_3 = 0 \\ \sigma_4 = 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x, y, z,$  et  $t$  sont les 4 solutions de l'équation  $X^4 - 5X^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x, y, z, t)$  est l'une des 24 permutations du quadruplet  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

### Correction de l'exercice 19 ▲

Le polynôme nul est solution. Soit  $P$  un polynôme non nul de degré  $n$  solution alors  $n = n - 1 + n - 2$  et donc  $n = 3$ . Posons donc  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) \\ &\Leftrightarrow (18a^2 - 8a)X^3 + (18ab - 4b)X^2 + (4b^2 + 6ac - 2c)X + 2bc - d = 0 \\ &\Leftrightarrow 18a^2 - 8a = 18ab - 4b = 4b^2 + 6ac - 2c = 2bc - d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et  $\frac{4}{9}X^3$ .

### Correction de l'exercice 20 ▲

0 n'est pas racine de  $P$ .

On rappelle que si  $r = \frac{p}{q}$ , ( $p \in \mathbb{Z}^*$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \wedge q = 1$ ) est racine de  $P$ , alors  $p$  divise le coefficient constant de  $P$  et  $q$  divise son coefficient dominant. Ici,  $p$  divise 4 et  $q$  divise 12 et donc,  $p$  est élément de  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$  et  $q$  est élément de  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  ou encore  $r$  est élément de  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12}\}$ .

Réciproquement, on trouve  $P(\frac{2}{3}) = P(\frac{1}{4}) = 0$ .  $P$  est donc divisible par

$$12(X - \frac{2}{3})(X - \frac{1}{4}) = (3X - 2)(4X - 1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Plus précisément,  $P = (12X^2 - 11X + 2)(X^2 + X + 2) = (3X - 2)(4X - 1)(X - \frac{-1+i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$ .

### Correction de l'exercice 21 ▲

Pour  $n \geq 0$ , posons  $P_n = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ .  $P_n(0) = P_n(1) = P_n(\frac{1}{2}) = 0$ .  $P_n$  admet 0, 1 et  $\frac{1}{2}$  pour racines et est donc divisible par  $X(X - 1)(2X - 1) = 2X^3 - 3X^2 + X$ .

Si  $n = 0$  ou  $n = 1$ , le quotient est nul. Si  $n = 2$ , le quotient vaut  $-2$ .

Soit  $n \geq 3$ . On met succesivement  $2X - 1$  puis  $X - 1$  puis  $X$  en facteur :

$$\begin{aligned}
P_n &= ((X-1)^2)^n - (X^2)^n + (2X-1) = ((X-1)2 - X2) \sum_{k=0}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + (2X-1) \\
&= (2X-1) \left( - \sum_{k=0}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 \right) = (2X-1) \left( - \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2} \right) \\
&= (2X-1) \left( -(X-1) \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - (X-1) \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left( - \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left( - \sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-1} X^k - 1 - (X-1)^{2n-3} \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left( - \sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^k - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} C_{2n-3}^k X^k \right) \\
&= X(2X-1)(X-1) \left( - \sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} C_{2n-3}^k X^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 22 ▲

$$\begin{aligned}
1 &= (X + (1-X))^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= (1-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n} (1-X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}$$

Soient  $U = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k}$  et  $V = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1-X)^{n+m-1-k}$ .  $U$  et  $V$  sont des polynômes tels que  $UX^n + V(1-X)^m = 1$ . De plus, pour  $n \leq k \leq n+m-1$ ,  $\deg(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$  et donc  $\deg(U) < m$  et de même pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\deg(X^k(1-X)^{n+m-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$  et  $\deg(V) < n$ .