Matrices

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i-3j+5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$.
3. Calculer M^2 et M^3.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}u^2$ et $\mathrm{Im}u^2$.
5. Calculer $(I-M)(I+M+M^2)$ et en déduire que $I-M$ est inversible. Préciser $(I-M)^{-1}$.

Correction ▼ [005257]

Exercice 2 **

Pour x réel, on pose :

$$A(x)=\begin{pmatrix} \mathrm{ch}x & \mathrm{sh}x\\ \mathrm{sh}x & \mathrm{ch}x\end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.

Correction ▼ [005258]

Exercice 3 ***T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1)=e_1$, $u(e_2)=e_1+e_2$ et $u(e_3)=e_2+e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i,j,k) à (e_1,e_2,e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.

Correction ▼ [005259]

Exercice 4 **

Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n+1}[X]\\ P & \mapsto & Q=e^{X^2}(Pe^{-X^2})'\end{array}$.

1. Vérifier que $f \in (\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{rg} f$.

Correction ▼ [005260]

Exercice 5 ***I

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice 2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005261]

Exercice 6 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour n entier relatif.

Correction ▼ [005262]

Exercice 7 **

Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \ x \in]-1,1[\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

Correction ▼ [005263]

Exercice 8 ***

1. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matirce triangulaire inférieure.

Correction ▼ [005264]

Exercice 9 ***

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $E = \{M(x,y) = xI + yJ, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E et sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les inversibles de E ?
4. Résoudre dans E les équations suivantes :

$$a)\ X^2 = I \quad b)\ X^2 = 0 \quad c)\ X^2 = X.$$

5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel non nul.

Correction ▼ [005265]

Exercice 10 ****

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer l'existence d'au moins un couple (A,B) vérifiant les conditions de l'énoncé puis calculer BA. (Indication. Calculer $(AB)^2$ et utiliser le rang.)

Correction ▼ [005266]

Exercice 11 ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ définie par

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ a_{i,j} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Correction ▼ [005267]

Exercice 12 ***I

Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).

Correction ▼ [005268]

Exercice 13 ***T

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 4) $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

5) $(\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 6) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005269]

Exercice 14 ****

Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ contient au moins une matrice inversible.

Correction ▼ [005270]

Exercice 15 ***

Soit f qui, à $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = X(X+1)P' - 2kXP$. Trouver k tel que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ puis, pour cette valeur de k, trouver tous les polynômes P non nuls tels que la famille $(P, f(P))$ soit liée. [005271]

Exercice 16 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \{1,...,n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Correction ▼ [005272]

Exercice 17 ***I

Calculs par blocs.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec $(A,A') \in (\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}))^2$, $(B,B') \in (\mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K}))^2$, $(C,C') \in (\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}))^2$ et $(D,D') \in (\mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K}))^2$. Calculer $M+N$ en fonction de A, B, C, D, A', B', C' et D'.
2. Question analogue pour MN en analysant précisément les formats de chaque matrice.

Correction ▼ [005273]

Exercice 18 ***I Matrice de VANDERMONDE des racines n-ièmes de l'unité

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, $(n \geqslant 2)$. Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\overline{A}$).

Correction ▼ [005274]

Exercice 19 ***

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs colinéaires à leurs images.
2. Ecrire les formules de changement de base correspondantes.
3. En déduire le calcul de A^n pour n entier naturel.

Correction ▼ [005275]

Exercice 20 ***I

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$ si $i \leqslant j$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse. (Indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$).

Correction ▼ [005276]

Exercice 21 **I

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
2. En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

Correction ▼ [005277]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $X=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$. $MX=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $u(2i-3j+5k)=i+2j-3k$.

2. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y=0\\-3x-y+z=0\\x-z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-2x\\z=x\end{array}\right..$$

   Donc, $\mathrm{Ker}u=\mathrm{Vect}(i-2j+k)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}u)=1$ et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}u=2$. Or, $u(j)=i-j$ et $u(k)=j+k$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}u$ qui est un plan vectoriel et donc $\mathrm{Im}u=\mathrm{Vect}(i-j,j-k)$.

3. $$M^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

   et

$$M^3=M^2.M=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=0.$$

4. $\mathrm{Ker}u^2$ est à l'évidence le plan d'équation $x+y+z=0$. Une base de $\mathrm{Ker}u^2$ est $(i-j,j-k)$ et donc $\mathrm{Ker}u^2=\mathrm{Im}u=\mathrm{Vect}(i-j,j-k)$.
   D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}u^2$ est une droite vectorielle. Mais $u^3=0$ s'écrit encore $u\circ u^2=0$, et donc $\mathrm{Im}u^2$ est contenue dans $\mathrm{Ker}u$ qui est une droite vectorielle. Donc, $\mathrm{Im}u^2=\mathrm{Ker}u=\mathrm{Vect}(i-2j+k)$.

5. $(I-M)(I+M+M^2)=I-M^3=I$. Par suite, $I-M$ est inversible à droite et donc inversible et

$$(I-M)^{-1}=I+M+M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&1\\-5&-2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned}A(x)A(y)&=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}x&\mathrm{sh}x\\\mathrm{sh}x&\mathrm{ch}x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}y&\mathrm{sh}y\\\mathrm{sh}y&\mathrm{ch}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y&\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y\\\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y&\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x+y)&\mathrm{sh}(x+y)\\\mathrm{sh}(x+y)&\mathrm{ch}(x+y)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$A(x)A(-x)=A(-x)A(x)=A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.
On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)\ldots A(x) = A(x+x\ldots+x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n=0$ car $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx) \\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}(u(i),u(j),u(k)) = rg(u(j),u(k),u(i))$. La matrice de cette dernière famille dans la base (i,j,k) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière famille est de rang 3. Donc, $\mathrm{rg}u = 3$ et u est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Posons $e_1 = u(i)$, $e_2 = u(j)$ et $e_3 = u(k)$.

$$\begin{cases} e_1 = k \\ e_2 = i-3k \\ e_3 = j+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_1 \\ i = 3e_1+e_2 \\ j = -3e_1+e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^{-1}(k) = i \\ u^{-1}(i) = 3i+j \\ u^{-1}(j) = -3i+k \end{cases}$$

et

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (Questions 2) et 3)). Posons $e_1 = xi+yj+zk$ (e_1, e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$u(e_1) = e_1 \Leftrightarrow (u-Id)(e_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$$

On prend $e_1 = i+j+k$.
Posons $e_2 = xi+yj+zk$.

$$u(e_2) = e_1+e_2 \Leftrightarrow (u-Id)(e_2) = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=1 \\ -y+z=1 \\ x-3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow y=x+1 \text{ et } z=x+2.$$

On prend $e_2 = j+2k$.
Posons $e_3 = xi+yj+zk$.

$$u(e_3) = e_2+e_3 \Leftrightarrow (u-Id)(e_3) = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=1 \\ x-3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow y=x \text{ et } z=x+1.$$

On prend $e_3 = k$.

La matrice de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base (i,j,k) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin,

$$\begin{cases} e_1 = i+j+k \\ e_2 = j+2k \\ e_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_3 \\ j = e_2-2e_3 \\ i = e_1-e_2+e_3 \end{cases},$$

et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

3. Voir question précédente.

4. Soit T est la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3). $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $T=P^{-1}AP$ ou encore $A=PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n, $A^n=PT^nP^{-1}$.

   Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ puis $N^3=0$.

   Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$T^n=(I+N)^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

   Cette formule reste claire pour $n=0$ et $n=1$. Pour $n=-1$, $(I+N)(I-N+N^2)=I+N^3=I$ et donc

$$T^{-1}=(I+N)^{-1}=I-N+N^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{(-1)(-1-1)}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

   et la formule reste vraie pour $n=-1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n}=(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$ mais $(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)(I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2)=I$ et donc $T^{-n}=I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ T^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

   Puis

$$\begin{aligned}A^n=PT^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\1&n+1&n(n+1)/2\\1&n+2&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(n-1)(n-2)/2&-n(n-2)&n(n-1)/2\\n(n-1)/2&-(n-1)(n+1)&n(n+1)/2\\n(n+1)/2&-n(n+2)&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

---

1. Pour P élément de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P) = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' = e^{X^2}(P'e^{-X^2} - 2XPe^{-X^2}) = P' - 2XP.$$

Ainsi, si P est un polynôme de degré infèrieur ou égal à n, $f(P) = P' - 2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et f est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

f est élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.

2. La matrice A cherchée est élément de $\mathscr{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$.
Pour $k = 0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$.
Si P n'est pas nul, $-2XP$ a un degré strictement plus grand que P' et donc $f(P)$ n'est pas nul. Par suite, $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ (f est donc injective) et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 0 = n+1$, ce qui montre que $\mathrm{Im}f$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (f n'est pas surjective).

Correction de l'exercice 5 ▲

f n'est pas nul et donc $\dim(\mathrm{Ker}f) \leqslant 2$. Puisque $f^2 = 0$, $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}f$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}f) \geqslant \mathrm{rg}f = 3 - \dim(\mathrm{Ker}f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}f) \geqslant \frac{3}{2}$.
Finalement, $\dim(\mathrm{Ker}f) = 2$. $\mathrm{Ker}f$ est un plan vectoriel et $\mathrm{Im}f$ est une droite vectorielle contenue dans $\mathrm{Ker}f$.
f n'est pas nul et donc il existe e_1 tel que $f(e_1) \neq 0$ (et en particulier $e_1 \neq 0$). Posons $e_2 = f(e_1)$. Puisque $f^2 = 0$, $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$ et e_2 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_3 de $\mathrm{Ker}f$ tel que (e_2, e_3) soit une base de $\mathrm{Ker}f$.
Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = 0 \Rightarrow \alpha e_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ (car } e_2 \neq 0).$$

Puis, comme $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, on obtient $\beta = \gamma = 0$ (car la famille (e_2, e_3) est libre).
Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on a montré que (e_1, e_2, e_3) est libre. Puisque cette famille est de cardinal 3, c'est une base de R^3. Dans cette base, la matrice A de f s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on a $f(e_k) = e_{p+1-k}$ et donc $f^2(e_k) = e_k$. Ainsi, $A^2 = I_p$. Mais alors, il est immédiat que, pour n entier naturel donné, $A^n = I_p$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $x \in]-1,1[$, posons $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Posons ensuite $G = \{M(x),\ x \in]-1,1[\}$.
Soit alors $x \in]-1,1[$. Posons $a = \text{argth}\, x$ de sorte que $x = \text{th}a$. On a

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \text{ch}\, a\begin{pmatrix} 1 & \text{th}a \\ \text{th}a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}a & \text{sh}a \\ \text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$, $N(a) = \begin{pmatrix} \text{ch}a & \text{sh}a \\ \text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $M(x) = N(\text{argth}x)$ ou aussi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $N(a) = M(\text{th}a)$. Par suite, $G = \{N(a),\ a \in \mathbb{R}\}$.
Soit alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \text{ch}a & \text{sh}a \\ \text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{ch}b & \text{sh}b \\ \text{sh}b & \text{ch}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}a\text{ch}b + \text{sh}a\text{sh}b & \text{sh}a\text{ch}b + \text{sh}b\text{ch}a \\ \text{sh}a\text{ch}b + \text{sh}b\text{ch}a & \text{ch}a\text{ch}b + \text{sh}a\text{sh}b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(a+b) & \text{sh}(a+b) \\ \text{sh}(a+b) & \text{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.
$N(0) = I_2 \in G$ et donc G est non vide.
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\det(N(a)) = \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1 \neq 0$ et donc $G \subset \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a)N(b) = N(a+b) \in G$.
$\forall a \in \mathbb{R}$, $(N(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \text{ch}a & -\text{sh}a \\ -\text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix} = N(-a) \in G$.
On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La démonstration la plus simple apparaîtra dans le chapitre suivant : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ou encore si et seulement si aucun des coefficients diagonaux n'est nul.

   Pour l'instant, le plus simple est d'utiliser le rang d'une matrice. Si aucun des coefficients diagonaux n'est nul, on sait que le rang de la matrice est son format et donc que cette matrice est inversible.

   Réciproquement, notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure dont le coefficient ligne i, colonne i, est nul. Si $i = n$, la dernière colonne de A est nulle et A n'est pas de rang n et donc n'est pas inversible. Si $i < n$, alors les $n-i+1$ dernières colonnes sont dans $\text{Vect}(e_{i+1},\dots,e_n)$ qui est de dimension au plus $n-i(< n-i+1)$, et encore une fois, la famille des colonnes de A est liée.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}' = (e_n,\dots,e_1)$. $\mathscr{B}'$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$. Soit alors P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ puis A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $A' = P^{-1}AP$ et donc que A et A' sont semblables.

   Vérifions alors que A' est une matrice triangulaire inférieure. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, posons $e'_i = e_{n+1-i}$. A est triangulaire supérieure. Donc, pour tout i, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1,\dots,e_i)$. Mais alors, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $f(e'_{n+1-i}) \in \text{Vect}(e'_n,\dots,e'_{n+1-i})$ ou encore, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $f(e'_i) \in \text{Vect}(e'_n,\dots,e'_i)$. Ceci montre que A' est une matrice triangulaire inférieure.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. $E = \text{Vect}(I,J)$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La famille (I,J) est clairement libre et donc est une base de E. Par suite, $\dim E = 2$.

2. $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$. Plus généralement, pour $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$,

$$M(x,y)M(x',y') = (xI+yJ)(x'I+y'J) = xx'I + (xy'+yx')J + yy'J^2 = (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J \ (*).$$

Montrons alors que $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.
E contient $I = 1.I + 0.J$. $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et, d'après $(*)$, E est stable pour $\times$.
Donc, $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

3. Soit $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$M(x,y)M(x',y') = I \Leftrightarrow (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} xx'-yy' = 1 \\ yx' + (x+2y)y' = 0 \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x+2y)+y^2 = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$.
Si $y \neq -x$, ce système admet un et seule couple solution. Par suite, si $y \neq -x$, il existe $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(x,y)M(x',y') = I$. Dans ce cas, la matrice $M(x,y)$ est inversible dans E.
Si $y = -x$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{array}\right.$ et n'a clairement pas de solution.

4. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = I \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = 1 \\ 2y(x+y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \text{ ou} \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = 1 \\ x+y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Dans E, l'équation $X^2 = I$ admet exactement deux solutions à savoir I et $-I$.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = 0 \\ 2y(x+y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \text{ ou} \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ 0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -x.$$

Dans E, l'équation $X^2 = 0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J-I) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y)^2 = M(x,y) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = x \\ 2y(x+y) = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = x \\ y(2x+2y-1) = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = x \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = -x+\frac{1}{2} \\ x^2 - (-x+\frac{1}{2})^2 = x \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4} = 0 \\ y = -x+\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Dans E, l'équation $X^2 = X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ tels que

$$f\circ g(e_1) = -e_2+e_3,\ f\circ g(e_2) = -e_1+e_3 \text{ et } f\circ g(e_3) = -e_1-e_2+2e_3 (= f\circ g(e_1+e_2)).$$

On pose $g(e_1) = i$, $g(e_2) = j$ et $g(e_3) = i+j$, puis $f(i) = -e_2+e_3$ et $f(j) = -e_1+e_3$. Les applications linéaires f et g conviennent, ou encore si on pose

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

alors $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

A et B désignent maintenant deux matrices quelconques, éléments de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivement, telles que $AB=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Calculons $(AB)^2$. On obtient

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=AB.$$

Mais alors, en multipliant les deux membres de cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient

$$(BA)^3=(BA)^2\ (*).$$

Notons alors que

$$\text{rg}(BA)\geqslant \text{rg}(ABAB)=\text{rg}((AB)^2)=\text{rg}(AB)=2,$$

et donc, BA étant une matrice carrée de format 2, $\text{rg}(BA)=2$. BA est donc une matrice inversible. Par suite, on peut simplifier les deux membres de l'égalité $(*)$ par $(BA)^2$ et on obtient $BA=I_2$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille d'éléments de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

Par définition, on a

$$\forall i\in\{1,...,n-1\},\ e'_i=ie_i+\sum_{j=i+1}^{n}e_j \text{ et } e'_n=ne_n.$$

En retranchant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\forall i\in\{1,...,n-1\},\ e'_i-e'_{i+1}=i(e_i-e_{i+1}) \text{ et } e'_n=ne_n,$$

ou encore

$$\forall i\in\{1,...,n-1\},\ e_i-e_{i+1}=\frac{1}{i}(e'_i-e'_{i+1}) \text{ et } e_n=\frac{1}{n}e'_n.$$

Mais alors, pour $i\in\{1,...,n-1\}$, on a

$$\begin{aligned}e_i&=\sum_{j=i}^{n-1}(e_j-e_{j+1})+e_n=\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}(e'_j-e'_{j+1})+\frac{1}{n}e'_n=\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}e'_j-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j+\frac{1}{n}e'_n\\&=\frac{1}{i}e'_i+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j}e'_j-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j\\&=\frac{1}{i}e'_i-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j(j-1)}e'_j\end{aligned}$$

Mais alors, $\mathbb{C}^n=\text{Vect}(e_1,...,e_n)\subset\text{Vect}(e'_1,...,e'_n)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}'=(e'_1,...,e'_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}^n$ et donc une base de $\mathbb{C}^n$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} = (a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a'_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i} \text{ si } i=j \\ -\frac{1}{i(i-1)} \text{ si } i>j \\ 0 \text{ si } i<j \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Maintenant,

$$AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \text{ et } E_{i,j}A = \sum_{k,l} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

On note que si $k \neq i$ ou $l \neq j$, $E_{k,j} \neq E_{i,l}$. Puisque la famille $(E_{i,j})$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : si $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$. D'autre part, le coefficient de $E_{i,j}$ est $a_{i,i}$ dans la première somme et $a_{j,j}$ dans la deuxième. Ces coefficients doivent être égaux.
Finalement, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

Correction de l'exercice 13 ▲

1.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1))$$
$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3-C_2))$$

Si $m = \frac{7}{36}$, $\mathrm{rg}A = 2$ (on note alors que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) et si $m \neq \frac{7}{36}$, $\mathrm{rg}A = 3$ et A est inversible.

2.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1))$$

1er cas. si a, b et c sont deux à deux distincts.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\mathrm{rg}A = 3$.

2ème cas. Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}$. Donc, si $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$, $\mathrm{rg}A = 2$.

3ème cas. Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3. Puisque $\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{rg}(C_1, C_2 - aC_1, C_3 - C_1, C_4 - bC_1)$,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

1er cas. Si $a \neq b$.

$$\text{rg}A = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(L_1,L_2,L_3) = \text{rg}(L_2,L_1,L_3)).$$

$$= 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab)-(2-a^2-ab) \end{pmatrix}$$

$$= 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (a-b)(a+b) \end{pmatrix}$$

Si $|a| \neq |b|$, $\text{rg}A = 4$ et si $a = -b \neq 0$, $\text{rg}A = 3$.
2ème cas. Si $a = b$.

$$\text{rg}A = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Si $a = b = \pm 1$, $\text{rg}A = 1$ et si $a = b \neq \pm 1$, $\text{rg}A = 2$.

4. Pour $n \geqslant 2$ et $j \in \{1,...,n\}$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice proposée.

$$C_j = (i+j+ij)_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = jU+V,$$

avec $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i+1 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\forall j \in \{1,...,n\}$, $C_j \in \text{Vect}(U,V)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leqslant 2$. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (lignes et colonnes 1 et 2) est inversible et finalement $\text{rg}A = 2$.

5. On suppose $n \geqslant 2$. La j-ème colonne de la matrice s'écrit

$$C_j = (\sin i \cos j + \sin j \cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \sin jC + \cos jS \text{ avec } C = (\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ et } S = (\sin i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Par suite, $\forall j \in \{1,...,n\}$, $C_j \in \text{Vect}(C,S)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leqslant 2$. De plus, la matrice extraite formée des termes lignes et colonnes 1 et 2 est inversible car son déterminant vaut $\sin 2 \sin 4 - \sin^2 3 = -0,7... \neq 0$ et finalement $\text{rg}A = 2$.

6. Déterminons $\text{Ker}A$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \text{Ker}A \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n-1\},\ ax_i + bx_{i+1} = 0 \text{ et} bx_1 + ax_n = 0\ (S).$$

1er cas. Si $a = b = 0$, alors clairement $\text{rg}A = 0$.
2ème cas. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\}\ x_i = 0$. Dans ce cas, $\text{Ker}A = \{0\}$ et donc $\text{rg}A = n$.

3ème cas. Si $a \neq 0$. Posons $\alpha = -\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n-1\},\ x_k = \alpha x_{k+1} \text{ et } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ x_k = \alpha^{-(k-1)} x_1 \text{ et } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ x_k = \alpha^{k-1} x_1 \text{ et } \alpha^n x_1 = x_1\end{aligned}$$

Mais alors, si $\alpha^n \neq 1$, le système (S) admet l'unique solution $(0,...,0)$ et $\mathrm{rg}A = n$, et si $\alpha^n = 1$, $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}((1,\alpha^{n-1},...,\alpha^2,\alpha))$ est de dimension 1 et $\mathrm{rg}A = n-1$.

En résumé, si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}A = 0$ et si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\mathrm{rg}A = n$. Si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in U_n$, $\mathrm{rg}A = n-1$ et si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \notin U_n$, $\mathrm{rg}A = n$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}f$.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j} a_{i,j}$.

1er cas. Supposons $\exists (i,j) \in \{1,...,n\}^2/\ i \neq j$ et $\alpha_{i,j} \neq 0$. On pose alors $S = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k}$ et on considère $A = \sum_{k=1}^n E_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} E_{i,j}$. A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et est donc inversible. De plus, $f(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} \alpha_{i,j} = S - S = 0$ et A est élément de H.

2ème cas. Supposons $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$, $(i \neq j \Rightarrow \alpha_{i,j} = 0)$. Alors, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} a_{i,i}$. Soit $A = E_{n,1} + E_{2,1} + E_{3,2} + ... + E_{n-1,n}$. A est inversible car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $(e_n, e_1, ..., e_{n-1})$. De plus, $f(A) = 0$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de A. Supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_i|,\ i \in \{1,...,n\}\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.
Mais alors,

$$\begin{aligned}AX = 0 &\Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0\\ &\Rightarrow |a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = |-\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j} x_j| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|.|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\end{aligned}$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0} \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Donc, il est absurde de supposer que $\mathrm{Ker}A$ contient un vecteur non nul et A est bien inversible.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $(i,j) \in \{1,...,p\} \times \{1,...,r\}$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $M+N$ est la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice M et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice N ou encore la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A'. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc
$$M+N = \begin{pmatrix} A+A' & B+B'\\ C+C' & D+D'\end{pmatrix}.$$
2. Posons $M = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, puis $A' \in \mathscr{M}_{t,p}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathscr{M}_{u,p}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathscr{M}_{t,q}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathscr{M}_{u,q}(\mathbb{K})$ (le découpage de M en colonne est le même que le découpage de N en lignes).

Soit alors $(i,j) \in \{1,...,r\} \times \{1,...,t\}$. Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice MN vaut

$$\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}n_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}.$$

Mais, $\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit AA' et $\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit BC'. Finalement, $\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k}n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit $AA'+BC'$. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc

$$MN = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soient k et l deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$. Le coefficient ligne k, colonne l de $A\overline{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)} = \sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1}.$$

1er cas. Si $k = l$, $\omega^{k-l} = 1$, et le coefficient vaut $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

2ème cas. Si $k \neq l$. On a $-(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1$ avec $k-l \neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n. Par suite, $\omega^{k-l} \neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1} = \frac{1-(\omega^{k-l})^n}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En résumé, $A\overline{A} = nI_n$. Donc A est inversible à gauche et donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Un vecteur non nul x est colinéaire à son image si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Les nombres λ correspondants sont les complexes tels qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ ou encore tels que $A-\lambda I_4 \notin \mathscr{GL}_4(\mathbb{C})$.

   Le déterminant de $A-\lambda I_4$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7-\lambda & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 0 & 0 \\ 11 & -6-\lambda & -12 \\ -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 20 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (7-\lambda)(-7-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4(-12)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-7)(\lambda+7)(\lambda^2-5\lambda+6) + 48(\lambda^2-5\lambda+6)$$
$$= (\lambda^2-5\lambda+6)(\lambda^2-49+48) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

   Ainsi, $A-\lambda I_4 \notin \mathscr{GL}_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lambda \in \{-1,1,2,3\}$.

   - Cas $\lambda = -1$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u+Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+4y=0 \\ -12x-6y=0 \\ 20x+11y-5z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+12t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ -2x-5z-12t=0 \\ z+2t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=-2t \\ -2x-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ t=-x \\ z=2x \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u+Id) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1,-2,2,-1)$.
- Cas $\lambda = 1$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+4y=0 \\ -12x-8y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+10t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -6x-3y+3z+5t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2}x \\ 14z+24t=7x \\ 6z+10t=3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2}x \\ z=\frac{1}{2}x \\ t=0 \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u-Id) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (2,-3,1,0)$.
- Cas $\lambda = 2$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+4y=0 \\ -12x-9y=0 \\ 20x+11y-8z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+9t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=02z+3t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=0 \\ z=-\frac{3}{2}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u-2Id) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,0,3,-2)$.
-Cas $\lambda = 3$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+4y=0 \\ -12x-10y=0 \\ 20x+11y-9z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+8t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=03z+4t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=0 \\ z=-\frac{4}{3}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u-3Id) = \mathrm{Vect}(e_4)$ où $e_4 = (0,0,4,-3)$.

Soit P la matrice de la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) dans la base canonique (i,j,k,l). On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1=i-2j+2k-l \\ e_2=2i-3j+k \\ e_3=3k-2l \\ e_4=4k-3l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=3e_3-2e_4 \\ l=4e_3-3e_4 \\ e_1=i-2j+2(3e_3-2e_4)-(4e_3-3e_4) \\ e_2=2i-3j+(3e_3-2e_4) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=3e_3-2e_4 \\ l=4e_3-3e_4 \\ i-2j=e_1-2e_3+e_4 \\ 2i-3j=e_2-3e_3+2e_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=3e_3-2e_4 \\ l=4e_3-3e_4 \\ i=-3e_1+2e_2+e_4 \\ j=-2e_1+e_2+e_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Vect}(i,j,k,l) \subset \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Donc, la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est génératrice de $\mathbb{C}^4$ et donc une base de $\mathbb{C}^4$. Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Les formules de changement de bases s'écrivent $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-1,1,2,3)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^n.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3(-1)^n & -2(-1)^n & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 3.2^n & 4.2^n \\ 3^n & 0 & -2.3^n & -3.3^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3(-1)^n+4 & -2(-1)^n+2 & 0 & 0 \\ 6(-1)^n-6 & 4(-1)^n-3 & 0 & 0 \\ -6(-1)^n+2+4.3^n & -4(-1)^n+1+3.2^n & 9.2^n-8.3^n & 12(2^n-3^n) \\ 3((-1)^n-3^n) & 2((-1)^n-2^n) & 6(3^n-2^n) & -8.2^n+9.3^n \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, associe le polynôme $P(X+1)$.
Par la formule du binôme de NEWTON, on voit que A est la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f est clairement un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa réciproque étant l'application qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X-1)$.
A est donc inversible et $A^{-1} = (b_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $b_{i,j} = (-1)^{i+j}C_j^i$ si $i \leqslant j$.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = I + J$. On a $J^2 = 2j$ et donc, plus généralement : $\forall k \geqslant 1$, $J^k = 2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$A^n = (I+J)^n = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k J^k = I + (\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1})J = I + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k - 1)J$$
$$= I + \frac{1}{2}((1+2)^n - 1)J = I + \frac{1}{2}(3^n-1)J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}.$$

Poour n entier naturel donné, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $X_{n+1} = A.X_n$ et donc,

$$X_n = A^n.X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n+1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} + v_{n+1} = 3(u_n + v_n)$. Donc, la suite $u + v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 3^n\ (I).$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$. Donc, la suite $u + v$ est une suite constante. Puisque $u_0 - v_0 = 1$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n = 1\ (II).$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n + 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$
