



## Comparaison des suites

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*I

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 1)  $\arccos \frac{n-1}{n}$    2)  $\arccos \frac{1}{n}$    3)  $\operatorname{ch}(\sqrt{n})$    4)  $(1 + \frac{1}{n})^n$    5)  $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$   
6)  $(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$    7)  $\ln(\cos \frac{1}{n})(\ln \sin \frac{1}{n})$    8)  $(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$    9)  $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

[Correction ▼](#)

[005252]

### Exercice 2 \*\*\*I

Montrer que  $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$ .

[Correction ▼](#)

[005253]

### Exercice 3 \*\*\*I

- Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles strictement positives. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .  
Montrer que si  $u_n \sim v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ , alors  $U_n \sim V_n$ .
- Application. Trouver un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  et  $\sum_{k=1}^n \ln(k)$ .

[Correction ▼](#)

[005254]

### Exercice 4 \*\*\*\*

Soit  $(u_n)$  une suite réelle de limite nulle. Montrer que si  $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$ , alors  $u_n \sim \frac{1}{n}$ . A-t-on : si  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ , alors  $u_n \sim \frac{1}{n}$  ?

[Correction ▼](#)

[005255]

### Exercice 5 \*\*\*I

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = \frac{\pi}{2}$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

- Montrer que la suite  $u$  est strictement positive, décroissante de limite nulle.
- On admet que si  $u$  est une suite de limite nulle, alors, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ .  
Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la suite  $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de CÉSARO à la suite  $(v_n)$ , en déduire un équivalent simple de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005256]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Tout d'abord, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{n-1}{n}$  existe et est élément de  $[-1, 1]$ . Donc,  $\arccos \frac{n-1}{n}$  existe pour tout entier naturel non nul  $n$ .

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{n-1}{n}$  tend vers 1 et donc  $\arccos \frac{n-1}{n}$  tend vers 0. Mais alors,

$$\arccos \frac{n-1}{n} \sim \sin(\arccos \frac{n-1}{n}) = \sqrt{1 - (\frac{n-1}{n})^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

2.  $\arccos \frac{1}{n}$  tend vers 1 et donc  $\arccos \frac{1}{n} \sim 1$ .

3.  $\operatorname{ch}(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}e^{\sqrt{n}}$ .

4.  $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1$  et donc,  $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$  tend vers  $e$ . Par suite,  $(1 + \frac{1}{n})^n \sim e$ .

5.  $\operatorname{argch} n$  existe pour  $n \geq 1$  et comme, pour  $n \geq 1$ ,  $n^4 + n^2 - 1 \geq n^4 > 0$ ,  $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$  existe pour  $n \geq 1$ .

$$\operatorname{argch} n = \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) \sim \ln(n + n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \sim \ln n.$$

Donc,  $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \frac{\ln n}{n^2}$ .

6.  $-\sqrt{n} \ln(\sqrt{n} + 1) = -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})) = -\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - 1 + o(1)$ , et donc

$$(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - 1 + o(1)} \sim e^{-\sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - 1} = \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$

7.

$$\ln(\cos \frac{1}{n}) (\ln \sin \frac{1}{n}) \sim (\cos \frac{1}{n} - 1) \ln(\frac{1}{n}) \sim (-\frac{1}{2n^2})(-\ln n) = \frac{\ln n}{2n^2}.$$

8.  $(\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n})^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5} (1 - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})))^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5} (1 - \frac{6}{5n\pi} + o(\frac{1}{n}))$ , et donc

$$(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5} (1 - 1 + \frac{6}{5n\pi} + o(\frac{1}{n})) \sim (\frac{\pi}{2})^{3/5} \frac{6}{5n\pi}$$

9. Tout d'abord, pour  $n \geq 1$ ,  $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ , et donc  $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq 0$ , puis  $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$  existe. Ensuite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

## Correction de l'exercice 2 ▲

Pour  $n \geq 2$ , on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}.$$

Mais, pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$  (le produit contenant au moins les deux premiers facteurs). Par suite,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

On en déduit que  $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Comme  $\frac{1}{n}$  tend aussi vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$  tend vers 1 et donc que

$$\sum_{k=0}^n k! \sim n!.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit  $\varepsilon > 0$ .

Les suites  $u$  et  $v$  sont équivalentes et la suite  $v$  est strictement positive. Donc, il existe un rang  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}v_n$ . Soit  $n > n_0$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| &= \frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leq \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^n |u_k - v_k| \\ &\leq \frac{1}{V_n} \left( \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0+1}^n v_k \right) \\ &\leq \frac{1}{V_n} \left( \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} V_n \right) = \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, l'expression  $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$  est constante quand  $n$  varie, et d'autre part,  $V_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que  $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par suite, il existe un rang  $n_1 > n_0$  tel que, pour  $n \geq n_1$ ,  $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Pour  $n \geq n_1$ , on a alors  $\left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| < \varepsilon).$$

Ainsi, la suite  $\frac{U_n}{V_n}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc  $U_n \sim V_n$ .

2.

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}.$$

Cette dernière expression tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

En résumé, pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ ,  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 0$ , de plus quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  et enfin,  $\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'après 1),

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \sim 2\sqrt{n}.$$

$$(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = (n+1-n)\ln n + (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + 1 + o(1) \sim \ln n.$$

Comme  $\sum_{k=1}^n ((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1)$  tend vers  $+\infty$  et que les suites considérées sont positives, on en déduit que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \sim \sum_{k=1}^n ((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1) \sim n\ln n.$$

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

---

Pour  $n \geq 1$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{n}$ . On a alors

$$\begin{aligned}n(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}) &= 1 + \frac{n}{n+1} - 2 + n(-1)^n \left( \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right) = \frac{(-1)^n n (\ln(n+1) - \ln n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \\ &= \frac{(-1)^n n \ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = \frac{(-1)^n (1+o(1))}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = o(1).\end{aligned}$$

Donc,  $n(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}) = o(1)$ , ou encore  $u_n + u_{n+1} = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$ , ou enfin,  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ . Pourtant,  $u_n$  est équivalent à  $\frac{(-1)^n}{\ln n}$  et pas du tout à  $\frac{1}{n}$  ( $|nu_n| = \frac{n}{\ln n} \rightarrow +\infty$ ).

Supposons maintenant que  $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$  et montrons que  $u_n \sim \frac{1}{n}$ .

On pose  $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ . Il s'agit maintenant de montrer que  $v_n = o(\frac{1}{n})$  sous l'hypothèse  $v_n + v_{2n} = o(\frac{1}{n})$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $n|v_n + v_{2n}| < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Soient  $n \geq n_0$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}|v_n| &= |v_n + v_{2n} - v_{2n} - v_{4n} + \dots + (-1)^p (v_{2^p n} + v_{2^{p+1} n}) + (-1)^{p+1} v_{2^{p+1} n}| \leq \sum_{k=0}^p |v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n}| + |v_{2^{p+1} n}| \\ \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=0}^p \frac{1}{2^k n} + |v_{2^{p+1} n}| &= \frac{\varepsilon}{4n} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + |v_{2^{p+1} n}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n} + |v_{2^{p+1} n}|\end{aligned}$$

Maintenant, la suite  $u$  tend vers 0, et il en est de même de la suite  $v$ . Par suite, pour chaque  $n \geq n_0$ , il est possible de choisir  $p$  tel que  $|v_{2^{p+1} n}| < \frac{\varepsilon}{2n}$ .

En résumé, si  $n$  est un entier donné supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $n|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |nv_n| < \varepsilon).$$

Par suite,  $v_n = o(\frac{1}{n})$  et donc  $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ , ou encore  $u_n \sim \frac{1}{n}$ .

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. Il est immédiat que la suite  $u$  est définie et à valeurs dans  $[-1, \frac{\pi}{2}]$ .

Plus précisément,  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , et si pour  $n \geq 0$ ,  $u_n \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , alors  $u_{n+1} \in ]0, 1] \subset ]0, \frac{\pi}{2}]$ . On a montré par récurrence que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

Montrons que pour tout réel  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin x > x$ . Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , posons  $f(x) = x - \sin x$ .  $f$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f'(x) = 1 - \cos x$ . Par suite,  $f'$  est strictement positive sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  et donc strictement croissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ . Mais alors, pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $f(x) > f(0) = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $u_n \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$ . La suite  $u$  est donc strictement décroissante. Puisque la suite  $u$  est d'autre part minorée par 0, la suite  $u$  converge vers un réel noté  $\ell$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ , on a  $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$ . Mais alors, par continuité de la fonction  $x \mapsto \sin x$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et donc en  $\ell$ , on a

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_n) = \sin(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = \sin(\ell).$$

Or, si  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x < x$  et en particulier  $\sin x \neq x$ . Donc,  $\ell = 0$ .

La suite  $u$  est strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Puisque  $u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$u_{n+1}^\alpha = (\sin(u_n))^\alpha = (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^\alpha = u_n^\alpha (1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^\alpha = u_n^\alpha (1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = u_n^\alpha - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}).$$

et donc,  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$ . En prenant  $\alpha = -2$ , on obtient alors

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CÉSARO,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$  tend également vers  $\frac{1}{3}$ . Mais,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right).$$

Ainsi,  $\frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{3} + o(1)$  puis,  $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) = \frac{n}{3} + o(n)$ . Donc,  $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ , puis  $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$  et enfin, puisque la suite  $u$  est strictement positive,

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$


---