



## Suites

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*\*IT

---

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$ .

1. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers un réel  $\ell$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et a pour limite  $\ell$ . Réciproque ?
2. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Réciproque ?
3. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi.

[Correction ▼](#)

[005220]

### Exercice 2 \*\*\*

---

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

[Correction ▼](#)

[005221]

### Exercice 3 \*\*IT

---

Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (série harmonique).

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ .
2. Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = H_n - \ln(n)$  et  $v_n = H_n - \ln(n+1)$ . Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers un réel  $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$  ( $\gamma$  est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près.

[Correction ▼](#)

[005222]

### Exercice 4 \*\*

---

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$ .

[Correction ▼](#)

[005223]

### Exercice 5 \*\*

---

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$ .

[Correction ▼](#)

[005224]

### Exercice 6 \*\*\*

---

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On pose  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$  puis, pour  $n$  entier naturel donné,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$ . Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et que leur limite commune est égale à  $\frac{b \sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$ .

[Correction ▼](#)

[005225]

### Exercice 7 \*\*

---

Limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de

1.  $\frac{\sin n}{n}$ ,
2.  $(1 + \frac{1}{n})^n$ ,
3.  $\frac{n!}{n^n}$ ,
4.  $\frac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$ ,
5.  $\sqrt[n]{n^2}$ ,
6.  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ,
7.  $\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$ ,
8.  $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2^k}}$ .

[Correction ▼](#)

[005226]

### Exercice 8 \*\*

Etudier la suite  $(u_n)$  définie par  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$ .

[Correction ▼](#)

[005227]

### Exercice 9 \*\*T Récurrences homogographiques

Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  quand la suite  $u$  vérifie :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$ ,
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{u_n}$  (ne pas se poser de questions d'existence).

[Correction ▼](#)

[005228]

### Exercice 10 \*\*

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par la donnée de  $u_0$  et  $v_0$  et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites  $u$  et  $v$  puis déterminer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$  en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de  $u$  et  $v$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

[Correction ▼](#)

[005229]

### Exercice 11 \*\*

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites définies par la donnée de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Etudier les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  puis déterminer  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$  en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de  $u$ ,  $v$  et  $w$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

[Correction ▼](#)

[005230]

### Exercice 12 \*\*\*

Montrer que les suites définies par la donnée de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  réels tels que  $0 < u_0 < v_0 < w_0$  et les relations de récurrence :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},$$

ont une limite commune que l'on ne cherchera pas à déterminer.

[Correction ▼](#)

[005231]

**Exercice 13 \*\*\***

Soit  $u$  une suite complexe et  $v$  la suite définie par  $v_n = |u_n|$ . On suppose que la suite  $(\sqrt[n]{v_n})$  converge vers un réel positif  $l$ . Montrer que si  $0 \leq \ell < 1$ , la suite  $(u_n)$  converge vers 0 et si  $\ell > 1$ , la suite  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que si  $\ell = 1$ , tout est possible.

[Correction ▼](#)

[005232]

**Exercice 14 \*\*\***

1. Soit  $u$  une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite  $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$  converge vers un réel  $\ell$ , alors  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge et a même limite.
2. Etudier la réciproque.
3. Application : limites de
  - (a)  $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$ ,
  - (b)  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ,
  - (c)  $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ .

[Correction ▼](#)

[005233]

**Exercice 15 \***

Soient  $u$  et  $v$  deux suites de réels de  $[0, 1]$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$ . Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers 1.

[Correction ▼](#)

[005234]

**Exercice 16 \*\***

Montrer que si les suites  $(u_n^2)$  et  $(u_n^3)$  convergent alors  $(u_n)$  converge.

[Correction ▼](#)

[005235]

**Exercice 17 \*\*\*T**

Etudier les deux suites  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  et  $v_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ .

[Correction ▼](#)

[005236]

**Exercice 18 \*\*T**

Etudier les deux suites  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ .

[Correction ▼](#)

[005237]

**Exercice 19**

Etudier les deux suites  $u_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n+1}$  et  $v_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}$ .

[Correction ▼](#)

[005238]

**Exercice 20 \*\*T**

Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = u_n$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ .
5.  $\forall n \geq 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$ .
6.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$ .

7.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5.$

[Correction ▼](#)

[005239]

**Exercice 21 \*\*\*\***

On pose  $u_1 = 1$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ .

[Correction ▼](#)

[005240]

**Exercice 22 \*\*\***

Montrer que, pour  $n \geq 2$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ radicaux}).$

[Correction ▼](#)

[005241]

**Exercice 23 \*\*\***

1. Montrer que pour  $x$  réel strictement positif, on a :  $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$ .
2. Montrer que  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$  et en déduire la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

[Correction ▼](#)

[005242]

**Exercice 24 \*\*\*\***

Soit  $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$  avec  $p_n \in \mathbb{Z}$  et  $q_n \in \mathbb{N}^*$ , une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel  $x$ . Montrer que les suites  $(|p_n|)$  et  $(q_n)$  tendent vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005243]

**Exercice 25 \*\***

Donner un exemple de suite  $(u_n)$  divergente, telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , la suite  $(u_{kn})$  converge.

[Correction ▼](#)

[005244]

**Exercice 26 \*\*\*I**

Soit  $f$  une application injective de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005245]

**Exercice 27 \*\*\*I**

Soit  $u_n$  l'unique racine positive de l'équation  $x^n + x - 1 = 0$ . Etudier la suite  $(u_n)$ .

[Correction ▼](#)

[005246]

**Exercice 28 \*\*\*\*I**

Etude des suites  $(u_n) = (\cos na)$  et  $(v_n) = (\sin na)$  où  $a$  est un réel donné.

1. Montrer que si  $\frac{a}{2\pi}$  est rationnel, les suites  $u$  et  $v$  sont périodiques et montrer dans ce cas que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent si et seulement si  $a \in 2\pi\mathbb{Z}$ .
2. On suppose dans cette question que  $\frac{a}{2\pi}$  est irrationnel.
  - (a) Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(v_n)$  converge.
  - (b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre  $u_n$  et  $v_n$ , montrer par l'absurde que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  divergent.

3. On suppose toujours que  $\frac{a}{2\pi}$  est irrationnel. On veut montrer que l'ensemble des valeurs de la suite  $(u_n)$  (ou  $(v_n)$ ) est dense dans  $[-1, 1]$ , c'est-à-dire que  $\forall x \in [-1, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / |u_n - x| < \varepsilon$  (et de même pour  $v$ ).
- (a) Montrer que le problème se ramène à démontrer que  $\{na + 2k\pi, n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que  $E = \{na + 2k\pi, n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  (par l'absurde en supposant que  $\inf(E \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$  pour en déduire que  $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ ).
- (c) Conclure.

[Correction ▼](#)

[005247]

---

**Exercice 29 \*\*\*\***

Montrer que l'ensemble  $E$  des réels de la forme  $u_n = \sin(\ln(n))$ ,  $n$  entier naturel non nul, est dense dans  $[-1, 1]$ .

[Correction ▼](#)

[005248]

---

**Exercice 30 \*\*\***

Calculer  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$ .

[Correction ▼](#)

[005249]

---

**Exercice 31 \*\*I**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de  $(u_n)$  tendant vers  $+\infty$ .

[Correction ▼](#)

[005250]

---

**Exercice 32 \*\*\***

Soit  $(u_n)$  une suite de réels éléments de  $]0, 1[$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .

[Correction ▼](#)

[005251]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$  alors  $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Soit  $n$  un entier naturel strictement supérieur à  $n_0$ .

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant,  $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$  est une expression constante quand  $n$  varie et donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| = 0$ . Par suite, il existe un entier  $n_1 \geq n_0$  tel que pour  $n \geq n_1$ ,  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour  $n \geq n_1$ , on a alors  $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$ . La suite  $(v_n)$  est donc convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

Si la suite  $u$  converge vers  $\ell$  alors la suite  $v$  converge vers  $\ell$ .

La réciproque est fautive. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , posons  $u_n = (-1)^n$ . La suite  $(u_n)$  est divergente. D'autre part, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k$  vaut 0 ou 1 suivant la parité de  $n$  et donc, dans tous les cas,  $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}$ . Par suite, la suite  $(v_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

2. Si  $u$  est bornée, il existe un réel  $M$  tel que, pour tout naturel  $n$ ,  $|u_n| \leq M$ . Pour  $n$  entier naturel donné, on a alors

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M = \frac{1}{n+1} (n+1)M = M.$$

La suite  $v$  est donc bornée.

Si la suite  $u$  est bornée alors la suite  $v$  est bornée.

La réciproque est fautive. Soit  $u$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p, p \in \mathbb{N} \\ -p & \text{si } n = 2p+1, p \in \mathbb{N} \end{cases}$ .  
 $u$  n'est pas bornée car la suite extraite  $(u_{2p})$  tend vers  $+\infty$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ . Mais, si  $n$  est impair,  $v_n = 0$ , et si  $n$  est pair,  $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$ , et dans tous les cas  $|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \frac{n}{2} \leq \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$  et la suite  $v$  est bornée.

3. Si  $u$  est croissante, pour  $n$  entier naturel donné on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2) \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( (n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^n u_k \right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (u_{n+1} - u_k) \geq 0. \end{aligned}$$

La suite  $v$  est donc croissante.

Si la suite  $u$  est croissante alors la suite  $v$  est croissante.

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

Supposons sans perte de généralité  $u$  croissante (quite à remplacer  $u$  par  $-u$ ). Dans ce cas, ou bien  $u$  converge, ou bien  $u$  tend vers  $+\infty$ . Supposons que  $u$  tende vers  $+\infty$ , et montrons qu'il en est de même pour la suite  $v$ . Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Il existe un rang  $n_0$  tel que pour  $n$  naturel supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $u_n \geq 2A$ . Pour  $n \geq n_0 + 1$ , on a alors,

$$v_n = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$  tend vers  $2A$  et donc, il existe un rang  $n_1$  à partir duquel  $v_n \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A$ . On a montré que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}), (n \geq n_1 \Rightarrow v_n > A)$ . Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . Par contraposition, si  $v$  ne tend pas vers  $+\infty$ , la suite  $u$  ne tend pas vers  $+\infty$  et donc converge, d'après la remarque initiale.

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$  et donc, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k) \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq (k+1-k) \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$  et, pour  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ . En sommant ces inégalités, on obtient pour  $n \geq 1$ ,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1),$$

et pour  $n \geq 2$ ,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand  $n = 1$ . Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.}$$

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \leq 0$$

car la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  décroît sur  $[n, n+1]$ . De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx = \int_{n+1}^{n+2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

car la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  décroît sur  $[n+1, n+2]$ . Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

et donc la suite  $u - v$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Finalement, la suite  $u$  décroît, la suite  $v$  croît et la suite  $u - v$  tend vers 0. On en déduit que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons  $\gamma$  cette limite. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $v_n \leq \gamma \leq u_n$ , et en

particulier,  $v_3 \leq \gamma \leq u_1$  avec  $v_3 = 0,5\dots$  et  $u_1 = 1$ . Donc,  $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Plus précisément, pour  $n$  entier naturel non nul donné, on a

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{0,005} - 1} = 199,5\dots \Leftrightarrow n \geq 200.$$

Donc  $0 \leq \gamma - v_{100} \leq \frac{10^{-2}}{2}$  et une valeur approchée de  $v_{200}$  à  $\frac{10^{-2}}{2}$  près (c'est-à-dire arrondie à la 3<sup>ème</sup> décimale la plus proche) est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près. On trouve  $\gamma = 0,57$  à  $10^{-2}$  près par défaut. Plus précisément,

$$\gamma = 0,5772156649\dots \text{ (\gamma est la constante d'EULER).}$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $r$  la raison de la suite  $u$ . Pour tout entier naturel  $k$ , on a

$$\frac{r}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$r \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}.$$

Si  $r \neq 0$ , on obtient  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$ , et si  $r = 0$  (et  $u_0 \neq 0$ ),  $u$  est constante et le résultat est immédiat.

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $k$  un entier naturel non nul. On sait que  $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ . Déterminons alors trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour entier naturel non nul  $k$ ,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \quad (*).$$

Pour  $k$  entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ensuite, d'après l'exercice 3, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 = -1 + \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - 1 + o(1) = \ln n + \gamma - 1 + o(1).$$

Enfin,



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + o(1) = \ln 2 + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6 \left( \ln n + \gamma + \ln n + \gamma - 1 - 4 \left( \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma - 1 \right) \right) = 6(3 - 4 \ln 2) + o(1).$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6(3 - 4 \ln 2).$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Posons  $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$ .  $\alpha$  existe car  $0 < \frac{a}{b} < 1$  et est élément de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . De plus,  $a = b \cos \alpha$ . Enfin, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{\alpha}{2^n} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc,  $\cos \frac{\alpha}{2^n} > 0$ . On a  $u_0 = b \cos \alpha$  et  $v_0 = b$  puis  $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{b}{2}(1 + \cos \alpha) = b \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  et  $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{b \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times b} = b \cos \frac{\alpha}{2}$  puis  $u_2 = \frac{b}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \frac{\alpha}{2}) = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  et  $v_2 = \sqrt{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times b \cos \frac{\alpha}{2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \dots$  Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$  et  $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$ . C'est vrai pour  $n = 1$  et si pour  $n \geq 1$  donné, on a  $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$  et  $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$  alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} + v_n) = v_n \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = v_n \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} \quad (\text{car } \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

et donc,  $v_{n+1} = b \prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^k}$  puis  $u_{n+1} = v_{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}$ . On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} \text{ et } u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $v_n > 0$  et  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$ . La suite  $v$  est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $u_n > 0$  et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \frac{\cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} \right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

La suite  $u$  est strictement croissante. Maintenant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} v_n &= b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} = b \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \end{aligned}$$

Donc, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $v_n \sim \frac{\sin \alpha}{2^n \frac{a}{b}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , puis  $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \sim v_n \sim \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ . Ainsi, les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes de limite commune  $b \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos(\frac{a}{b})}$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\frac{\sin n}{n}| \leq \frac{1}{n}$ . Comme  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$ . Donc,  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  tend vers 1 puis,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$  tend vers  $e^1 = e$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ . Pour  $n$  entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n \ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n + o(1/n))} = e^{-1+o(1)}$ . Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers  $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$ . On sait alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

4. Pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - 1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2 - 1}$ . Or,  $\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - 1}{(n-\frac{1}{2})^2}$  et  $\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2 - 1}$  tendent vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite  $u$  converge et a pour limite 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.$$

5. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n} \ln(n^2)} = e^{2 \ln n / n} = e^{o(1)}$ , et donc  $\sqrt[n]{n^2}$  tend vers 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

6.  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$ .

7.  $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$ .

8.  $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}}$ . Pour  $x$  réel, posons  $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme et pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'(x).$$

Pour  $x \neq 1$ , on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

En particulier,  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \rightarrow 4$  (d'après un théorème de croissances comparées).  
Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \rightarrow 2^{4/2} = 4.$$

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ 4(n+u_n) &= (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n + \frac{1}{4}(2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}) \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)})\end{aligned}$$

Par suite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned}u_n &= -\frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \left( \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  converge et a pour limite  $\frac{1}{2}$ .

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. Calcul formel de  $u_n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$ . Pour  $n$  entier naturel donné, on a alors

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n-3}{u_n} = 3\frac{u_n-1}{u_n}.$$

Par suite,  $\frac{u_n-1}{u_n} = 3^n \frac{u_0-1}{u_0}$ , puis  $u_n = \frac{u_0}{u_0-3^n(u_0-1)}$ .

2. Calcul formel de  $u_n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ . Pour  $n$  entier naturel donné, on a alors

$$\frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n}-2} = \frac{u_n}{2(u_n-2)} = \frac{u_n-2+2}{2(u_n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n-2}.$$

Par suite,  $\frac{1}{u_n-2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0-2}$ , puis  $u_n = 2 + \frac{2(u_0-2)}{(u_0-2)n+2}$ .

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \end{cases}$ . La dernière relation montre que la suite  $v - u$

garde un signe constant puis les deux premières relations montrent que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(v_n - u_n)$  et  $\text{sgn}(v_{n+1} - v_n) = -\text{sgn}(v_n - u_n)$ . Les suites  $u$  et  $v$  sont donc monotones de sens de variation opposés. Si par exemple  $u_0 \leq v_0$ , alors, pour tout naturel  $n$ , on a :

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Dans ce cas, la suite  $u$  est croissante et majorée par  $v_0$  et donc converge vers un certain réel  $\ell$ . De même, la suite  $v$  est décroissante et minorée par  $u_0$  et donc converge vers un certain réel  $\ell'$ . Enfin, puisque pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$ , on obtient par passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini,  $\ell = \frac{2\ell+\ell'}{3}$  et

donc  $\ell = \ell'$ . Les suites  $u$  et  $v$  sont donc adjacentes. Si  $u_0 > v_0$ , il suffit d'échanger les rôles de  $u$  et  $v$ . **Calcul des suites  $u$  et  $v$ .** Pour  $n$  entier naturel donné, on a  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ . La suite  $v - u$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ . Pour tout naturel  $n$ , on a donc  $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$ . D'autre part, pour  $n$  entier naturel donné,  $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$ . La suite  $v + u$  est constante et donc, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_n + u_n = v_0 + u_0$ . En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = \frac{1}{2} \left( v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2} \left( v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right).$$

En particulier,  $\ell = \ell' = \frac{u_0 + v_0}{2}$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$  et donc,  $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$ . De même, en échangeant les rôles de  $u$ ,  $v$  et  $w$ ,  $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$  et  $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$  (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation). On a aussi,  $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$  et donc, pour tout naturel  $n$ ,  $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$ . Ainsi,  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  sont solutions du système

$$\begin{cases} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{cases} .$$

Par suite, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} \left( (u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0) \right) \\ v_n = \frac{1}{3} \left( (u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0) \right) \\ w_n = \frac{1}{3} \left( (u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0) \right) \end{cases} .$$

Les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  convergent vers  $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

Montrons tout d'abord que :

$$\forall (x, y, z) \in ]0, +\infty[^3, (x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}).$$

Posons  $m = \frac{x+y+z}{3}$ ,  $g = \sqrt[3]{xyz}$  et  $h = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ . Soient  $y$  et  $z$  deux réels strictement positifs tels que  $y \leq z$ . Pour  $x \in ]0, y]$ , posons

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln \left( \frac{x+y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (\ln x + \ln y + \ln z).$$

$u$  est dérivable sur  $]0, y]$  et pour  $x \in ]0, y]$ ,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

$u$  est donc décroissante sur  $]0, y]$  et pour  $x$  dans  $]0, y]$ ,  $u(x) \geq u(y) = \ln \left( \frac{2y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (2 \ln y + \ln z)$ . Soit  $z$  un réel strictement positif fixé. Pour  $y \in ]0, z]$ , posons  $v(y) = \ln \left( \frac{2y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (2 \ln y + \ln z)$ .  $v$  est dérivable sur  $]0, z]$  et pour  $y \in ]0, z]$ ,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leq \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

$v$  est donc décroissante sur  $]0, z]$  et pour  $y$  dans  $]0, z]$ , on a  $v(y) \geq v(z) = 0$ . On vient de montrer que  $g \leq m$ . En appliquant ce résultat à  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{y}$  et  $\frac{1}{z}$ , on obtient  $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$  et donc  $h \leq g$ . Enfin,  $m \leq \frac{z+z+z}{3} = z$  et  $h \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} = x$ . Finalement,

$$x \leq h \leq g \leq m \leq z.$$

Ce résultat préliminaire étant établi, puisque  $0 < u_0 < v_0 < w_0$ , par récurrence, les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont définies puis, pour tout naturel  $n$ , on a  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , et de plus  $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \leq w_0$ . La suite  $u$  est croissante et majorée par  $w_0$  et donc converge. La suite  $w$  est décroissante et minorée par  $u_0$  et donc converge. Enfin, puisque pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$ , la suite  $v$  converge. Soient alors  $a$ ,  $b$  et  $c$  les limites respectives des suites  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Puisque pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 < u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n$ , on a déjà par passage à la limite  $0 < u_0 \leq a \leq b \leq c$ . Toujours par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\begin{cases} \frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc = ab + ac \\ b^2 = ac \\ a + b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c - a \\ a^2 - 5ac + 4c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = c) \text{ ou } (a = 4c \text{ et } b = -2c).$$

$b = -2c$  est impossible car  $b$  et  $c$  sont strictement positifs et donc,  $a = b = c$ . Les suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  convergent vers une limite commune.

### Correction de l'exercice 13 ▲

Supposons que la suite  $(\sqrt[n]{v_n})$  tende vers le réel positif  $\ell$ .

- Supposons que  $0 \leq \ell < 1$ . Soit  $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ .

$\varepsilon$  est un réel strictement positif et donc,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$ .

Pour  $n \geq n_0$ , par croissance de la fonction  $t \mapsto t^n$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient  $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ . Or,  $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$  et donc  $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il en résulte que  $u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- Supposons que  $\ell > 1$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2})$ . Mais alors, pour  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ . Or,  $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$ , et donc  $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il en résulte que  $|u_n|$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit, pour  $\alpha$  réel et  $n$  entier naturel non nul,  $u_n = n^\alpha$ .  $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et ceci pour toute valeur de  $\alpha$ . Mais, si  $\alpha < 0$ ,  $u_n$  tend vers 0, si  $\alpha = 0$ ,  $u_n$  tend vers 1 et si  $\alpha > 0$ ,  $u_n$  tend vers  $+\infty$ . Donc, si  $\ell = 1$ , on ne peut rien conclure.

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Supposons  $\ell > 0$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif, élément de  $]0, \ell[$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2})$ . Pour  $n > n_0$ , puisque  $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \dots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0}$ , on a  $u_{n_0} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$ , et donc

$$(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers  $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ , et le membre de droite tend vers  $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$ . Par suite, on peut trouver un entier naturel  $n_1 \geq n_0$  tel que, pour  $n \geq n_1$ ,  $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$ , et  $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$ . Pour  $n \geq n_1$ , on a alors  $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$ . On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon))$ . Donc,  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers  $\ell$ . On traite de façon analogue le cas  $\ell = 0$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Soit  $u$  la suite définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1} b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par  $a$  ou  $b$ ). Alors,  $\sqrt[p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$  et  $\sqrt[p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} \rightarrow \sqrt{ab}$ . Donc,  $\sqrt[p]{u_n}$  tend vers  $\sqrt{ab}$  (et en particulier converge). On a bien sûr  $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$  et  $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$ . La suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.

3. (a) Pour  $n$  entier naturel donné, posons  $u_n = \binom{2n}{n}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers 4 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$  tend vers 4 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(b) Pour  $n$  entier naturel donné, posons  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers  $e$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$  tend vers  $e$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(c) Pour  $n$  entier naturel donné, posons  $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$ .

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}. \end{aligned}$$

Maintenant,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n \ln(1+1/n)} = e^{-2n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-2+o(1)}$ , et donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers  $27e^{-2}$ . Par suite,  $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$  tend vers  $\frac{27}{e^2}$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour  $v$  en échangeant les rôles de  $u$  et  $v$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

Si  $u_n^2 \rightarrow 0$ , alors  $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \rightarrow 0$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ . Si  $u_n^2 \rightarrow \ell \neq 0$ , alors  $(u_n) = \left(\frac{u_n^3}{u_n}\right)$  converge. (L'exercice n'a d'intérêt que si la suite  $u$  est une suite complexe, car si  $u$  est une suite réelle, on écrit immédiatement  $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$  (et non pas  $u_n = \sqrt{u_n^2}$ )).

### Correction de l'exercice 17 ▲

Les suites  $u$  et  $v$  sont définies à partir du rang 1 et strictement positives. Pour tout naturel non nul  $n$ , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1)\ln(n+2) + n\ln n - (2n+1)\ln(n+1)}.$$

Pour  $x$  réel strictement positif, posons alors  $f(x) = (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1)$ .  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+1}{x+1} - 2\ln(x+1) \\
&= \frac{x+2-1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+2-1}{x+1} - 2\ln(x+1) \\
&= -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \ln x + \ln(x+2) - 2\ln(x+1).
\end{aligned}$$

De même,  $f'$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+1} \\
&= \frac{x(x+1)^2 - x(x+2)^2 + (x+1)^2(x+2)^2 + x(x+1)^2(x+2) - 2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\
&= \frac{-2x^2 - 3x + (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + x)(x^2 + 4x + 4)}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\
&= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

$f'$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et donc, pour  $x > 0$ ,

$$f'(x) < \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+1} + \ln \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} \right) = 0.$$

Donc,  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Or, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1) \\
&= (x+(x+1)-(2x+1))\ln x + (x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

On sait que  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ , et donc, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $f(x)$  tend vers  $0+0+2-2=0$ . Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ , pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) > \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .  $f$  est donc strictement positive sur  $]0, +\infty[$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n) > 0$  et donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{f(n)} > 1$ . La suite  $u$  est strictement croissante. (Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction  $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$  sur  $]0, +\infty[$ .) On montre de manière analogue que la suite  $v$  est strictement décroissante. Enfin, puisque  $u_n$  tend vers  $e$ , et que  $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$  tend vers  $e$ , les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes. (Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Par exemple, pour  $n=10$ , on obtient  $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} < e < \left(\frac{11}{10}\right)^{11}$  et donc,  $2,59... < e < 2,85...$  et pour  $n=100$ , on obtient  $1,01^{100} < e < 1,01^{101}$  et donc  $2,70... < e < 2,73...$  Ces deux suites convergent vers  $e$  lentement).

### Correction de l'exercice 18 ▲

Il est immédiat que  $u$  croît strictement et que  $v-u$  est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour  $n$  entier naturel donné,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} < 0,$$

et la suite  $v$  est strictement décroissante. Les suites  $u$  et  $v$  sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir  $e$ ).

(Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$  et  $n = 5$  fournit par exemple  $2,716... < e < 2,718...$ ).

### Correction de l'exercice 19 ▲

Pour  $n$  entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

La suite  $u$  est strictement croissante et la suite  $v$  est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

et la suite  $v - u$  converge vers 0. Les suites  $u$  et  $v$  sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. L'équation caractéristique est  $4z^2 - 4z - 3 = 0$ . Ses solutions sont  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ . Les suites cherchées sont les suites de la forme  $(u_n) = \left(\lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes). Si  $u_0$  et  $u_1$  sont les deux premiers termes de la suite  $u$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les solutions du système  $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = u_1 \end{cases}$  et donc  $\lambda = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1)$  et  $\mu = \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

2. Clairement  $u_{2n} = \frac{1}{4^n}u_0$  et  $u_{2n+1} = \frac{1}{4^n}u_1$  et donc  $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}(1 + (-1)^n)u_0 + 2 \times \frac{1}{2^n}(1 - (-1)^n)u_1\right)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + (-1)^n)u_0 + 2(1 - (-1)^n)u_1\right).$$

3. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme  $\lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n$ . Une solution particulière de l'équation proposée est une constante  $a$  telle que  $4a = 4a + 3a + 12$  et donc  $a = -4$ . Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme  $\left(-4 + \lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les solutions du système  $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 + u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = 4 + u_1 \end{cases}$  et donc  $\lambda = \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1)$  et  $\mu = \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4 + \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4. La suite  $v = \frac{1}{u}$  est solution de la récurrence  $2v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$  et donc,  $(v_n)$  est de la forme  $\left(\lambda \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$  et donc  $u_n = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$ .
5. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme  $(\lambda + \mu 2^n)$ . 1 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme  $u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$ . Pour  $n \geq 2$ , on a



$$\begin{aligned}
u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} &= (an^4 + bn^3 + cn^2 + dn) - 3(a(n-1)^4 + b(n-1)^3 + c(n-1)^2 + d(n-1)) \\
&\quad + 2(a(n-2)^4 + b(n-2)^3 + c(n-2)^2 + d(n-2)) \\
&= a(n^4 - 3(n-1)^4 + 2(n-2)^4) + b(n^3 - 3(n-1)^3 + 2(n-2)^3) \\
&\quad + c(n^2 - 3(n-1)^2 + 2(n-2)^2) + d(n - 3(n-1) + 2(n-2)) \\
&= a(-4n^3 + 30n^2 - 52n + 29) + b(-3n^2 + 15n - 13) + c(-2n + 5) + d(-1) \\
&= n^3(-4a) + n^2(30a - 3b) + n(-52a + 15b - 2c) + 29a - 13b + 5c - d.
\end{aligned}$$

$u$  est solution  $\Leftrightarrow -4a = 1$  et  $30a - 3b = 0$  et  $-52a + 15b - 2c = 0$  et  $29a - 13b + 5c - d = 0$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{5}{2}, c = -\frac{49}{4}, d = -36.$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme  $(-\frac{1}{4}(n^3 + 10n^2 + 49n + 144) + \lambda + \mu 2^n)$ .

6. Pour tout complexe  $z$ ,  $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3)$  et les suites solutions sont les suites de la forme  $(\alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n)$ .
7. Pour tout complexe  $z$ ,  $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = (z^2 + 1)^2 - 2z(z^2 + 1) = (z-1)^2(z^2 + 1)$ . Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme  $\alpha + \beta n + \gamma i^n + \delta(-i)^n$ . 1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme  $u_n = an^7 + bn^6 + cn^5 + dn^4 + en^3 + fn^2$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\begin{aligned}
u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n &= a((n+4)^7 - 2(n+3)^7 + 2(n+2)^7 - 2(n+1)^7 + n^7) \\
&\quad + b((n+4)^6 - 2(n+3)^6 + 2(n+2)^6 - 2(n+1)^6 + n^6) \\
&\quad + c((n+4)^5 - 2(n+3)^5 + 2(n+2)^5 - 2(n+1)^5 + n^5) \\
&\quad + d((n+4)^4 - 2(n+3)^4 + 2(n+2)^4 - 2(n+1)^4 + n^4) \\
&\quad + e((n+4)^3 - 2(n+3)^3 + 2(n+2)^3 - 2(n+1)^3 + n^3) \\
&\quad + f((n+4)^2 - 2(n+3)^2 + 2(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2) \\
&= a(84n^5 + 840n^4 + 4340n^3 + 12600n^2 + 19348n + 12264) \\
&\quad + b(60n^4 + 480n^3 + 1860n^2 + 3600n + 2764) \\
&\quad + c(40n^3 + 240n^2 + 620n + 600) + d(24n^2 + 96n + 124) + e(12n + 24) + 4f \\
&= n^5(84a) + n^4(840a + 60b) + n^3(4340a + 480b + 40c) + n^2(12600a + 1860b + 240c + 24d) \\
&\quad + n(19348a + 3600b + 620c + 96d + 12e) + (12264a + 2764b + 600c + 124d + 24e + 4f)
\end{aligned}$$

$u$  est solution si et seulement si  $84a = 1$  et donc  $a = \frac{1}{84}$ , puis  $840a + 60b = 0$  et donc  $b = -\frac{1}{6}$ , puis  $4340a + 480b + 40c = 0$  et donc  $c = \frac{17}{24}$ , puis  $12600a + 1860b + 240c + 24d = 0$  et donc  $d = -\frac{5}{12}$  puis  $19348a + 3600b + 620c + 96d + 12e = 0$  et donc  $e = -\frac{59}{24}$  puis  $12264a + 2764b + 600c + 124d + 24e + 4f = 0$  et donc  $f = \frac{1}{12}$ . La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{168}(2n^7 - 28n^6 + 119n^5 - 70n^4 - 413n^3 + 14n^2) + \alpha + \beta n + \gamma i^n + \delta(-i)^n, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4.$$

### Correction de l'exercice 21 ▲

Tout d'abord, on montre facilement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ . Mais alors, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1 + n$ . Par suite, pour  $n \geq 2$ ,  $1 \leq u_n \leq n$ , ce qui reste vrai pour  $n = 1$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n.$$

Supposons momentanément que la suite  $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $\ell$ . Dans ce cas :

$$1 + \frac{n}{u_n} = 1 + \frac{n}{\sqrt{n} + \ell + o(1)} = 1 + \sqrt{n} \frac{1}{1 + \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + \sqrt{n} \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + 1 - \ell + o(1).$$

D'autre part,

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \ell + o(1) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + \ell + o(1) = \sqrt{n} + \ell + o(1),$$

et donc  $\ell - (1 - \ell) = o(1)$  ou encore  $2\ell - 1 = 0$ . Donc, si la suite  $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $\ell$ , alors  $\ell = \frac{1}{2}$ . Il reste à démontrer que la suite  $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$  converge. On note que pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} (-u_n^2 + u_n + n) = \frac{1}{u_n} \left( \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) - u_n \right) \left( u_n - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) \right).$$

Montrons par récurrence que pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$ . Posons  $v_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$  et  $w_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$ .

Si  $n = 1$ ,  $v_1 = 1 \leq u_1 = 1 \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = w_1$ .

Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $v_n \leq u_n \leq w_n$ . Alors,

$$1 + \frac{2n}{\sqrt{4n+1} + 1} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3} + 1}.$$

Mais, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+5}) - \left(1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3} + 1}\right)\right) &= \operatorname{sgn}\left((1 + \sqrt{4n+5})(1 + \sqrt{4n-3}) - 2(2n+1 + \sqrt{4n-3})\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(\sqrt{4n+5}(1 + \sqrt{4n-3}) - (4n+1 + \sqrt{4n-3})\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left((4n+5)(1 + \sqrt{4n-3})^2 - (4n+1 + \sqrt{4n-3})^2\right) \text{ (par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[)} \\ &= \operatorname{sgn}\left((4n+5)(4n-2 + 2\sqrt{4n-3}) - ((4n+1)^2 + 2(4n+1)\sqrt{4n-3} + 4n-3)\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(-8 + 8\sqrt{4n-3}\right) = \operatorname{sgn}\left(\sqrt{4n-3} - 1\right) = \operatorname{sgn}\left((4n-3) - 1\right) = \operatorname{sgn}(n-1) = + \end{aligned}$$

Donc,  $u_{n+1} \leq 1 + 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3} + 1} \leq w_{n+1}$ .

D'autre part,

$$1 + \frac{2n}{\sqrt{4n+1} + 1} = \frac{2n+1 + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1} + 1} = \frac{(\sqrt{4n+1} + 1)^2}{2(\sqrt{4n+1} + 1)} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) = v_{n+1},$$

et donc  $v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq w_{n+1}$ .

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}),$$

(ce qui montre au passage que  $u$  est croissante).

Donc, pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} - \sqrt{n},$$

ou encore, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \sqrt{n}} \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}}.$$

Maintenant, comme les deux suites  $(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \sqrt{n}})$  et  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}})$  convergent toutes deux vers  $\frac{1}{2}$ , d'après le théorème de la limite par encadrements, la suite  $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

L'égalité proposée est vraie pour  $n = 2$  car  $\cos \frac{\pi}{2^2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$  ( $n - 1$  radicaux).

Alors, puisque  $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) > 0$  (car  $\frac{\pi}{2^{n+1}}$  est dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ),

$$\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}})} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}, \text{ (n radicaux).}$$

On a montré par récurrence que, pour  $n \geq 2$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$  ( $n - 1$  radicaux).

Ensuite, pour  $n \geq 2$ ,

$$\sin(\frac{\pi}{2^n}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \text{ (n - 1 radicaux)}$$

Enfin,

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = 2^n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2^{n+1} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = \pi$ .

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

1. Pour  $x$  réel positif, posons  $f(x) = x - \ln(1+x)$  et  $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$ .  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

et

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

$f$  et  $g$  sont donc strictement croissantes sur  $]0, +\infty[$  et en particulier, pour  $x > 0$ ,  $f(x) > f(0) = 0$  et de même,  $g(x) > g(0) = 0$ . Finalement,  $f$  et  $g$  sont strictement positives sur  $]0, +\infty[$  ou encore,

$$\forall x > 0, \ln(1+x) < x < (1+x) \ln(1+x).$$

2. Soit  $k$  un entier naturel non nul.

D'après 1),  $\ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k} < (1 + \frac{1}{k}) \ln(1 + \frac{1}{k})$ , ce qui fournit  $k \ln(1 + \frac{1}{k}) < 1 < (k+1) \ln(1 + \frac{1}{k})$ , puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < (1 + \frac{1}{k})^k < e < (1 + \frac{1}{k})^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul  $n$  :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^n k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^n k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$  et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} (n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme  $\frac{n+1}{n}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini de même que  $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$ , on a montré que  $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$  tend vers  $\frac{1}{e}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 24 ▲

Soit  $x$  un irrationnel et  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rationnels tendant vers  $x$  ( $p_n$  entier relatif et  $q_n$  entier naturel non nul, la fraction  $\frac{p_n}{q_n}$  n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers  $+\infty$ . Donc :

$$\exists A > 0 / (\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0 / q_n \geq A)$$

ou encore, il existe une suite extraite  $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est bornée.

La suite  $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais alors, on peut extraire de la suite  $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et donc de la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui est constante et en particulier convergente.

La suite  $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.

Ainsi, on peut extraire de la suite  $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et donc de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(p_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  constante. La suite  $((q_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est également constante car extraite de la suite constante  $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et finalement, on a extrait de la suite  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous suite  $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  constante.

Mais la suite  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x$  et donc la suite extraite  $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x$ . Puisque  $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$  et donc  $x$  est rationnel. Contradiction.

Donc la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ . Enfin si  $(|p_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $+\infty$ , on peut extraire de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite bornée  $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Mais alors, la suite  $(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x = 0$  contredisant l'irrationalité de  $x$ . Donc, la suite  $(|p_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction de l'exercice 25 ▲

On pose  $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 0, u_5 = 1, \dots$  c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ est premier} \end{cases}.$$

Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour  $n \geq 2$ , l'entier  $kn$  est composé et donc, pour  $n \geq 2, u_{kn} = 0$ . En particulier, la suite  $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$  converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si  $p_n$  est le  $n$ -ième nombre premier, la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante. La suite  $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et est constante égale à 1. En particulier, la suite  $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 1. Ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge bien que toutes les suites  $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0 pour  $k \geq 2$ .

---

### Correction de l'exercice 26 ▲

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans lui-même, injective. Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ .

Soient  $A$  un réel puis  $m = \text{Max}(0, 1 + E(A))$ .

Puisque  $f$  est injective, on a  $\text{card}(f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})) \geq m + 1$ . En particulier,  $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$  est fini (éventuellement vide).

Posons  $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\}) = \emptyset \\ \text{Max } f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\}) & \text{sinon} \end{cases}$ .

Par définition de  $n_0$ , si  $n \geq n_0$ ,  $n$  n'est pas élément de  $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$  et donc  $f(n) > m > A$ .

On a montré que  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow f(n) > A))$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 27 ▲

Pour  $n$  naturel non nul et  $x$  réel positif, posons  $f_n(x) = x^n + x - 1$ .

Pour  $x \geq 0$ ,  $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  et donc  $u_1 = \frac{1}{2}$ .

Pour  $n \geq 2$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et pour  $x \geq 0$ ,  $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ .

$f_n$  est ainsi continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et donc bijective de  $\mathbb{R}^+$  sur  $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)] = [-1, +\infty[$ , et en particulier,

$$\exists ! x \in [0, +\infty[ / f_n(x) = 0.$$

Soit  $u_n$  ce nombre. Puisque  $f_n(0) = -1 < 0$  et que  $f_n(1) = 1 > 0$ , par stricte croissance de  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.$$

La suite  $u$  est donc bornée.

Ensuite, pour  $n$  entier naturel donné et puisque  $0 < u_n < 1$  :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc  $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$  puis, par stricte croissance de  $f_{n+1}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

La suite  $u$  est bornée et strictement croissante. Donc, la suite  $u$  converge vers un réel  $\ell$ , élément de  $[0, 1]$ .

Si  $0 \leq \ell < 1$ , il existe un rang  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on a :  $u_n \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$ . Mais alors, pour  $n \geq n_0$ , on a  $1 - u_n = u_n^n \leq (\frac{1+\ell}{2})^n$  et quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $1 - \ell \leq 0$  ce qui est en contradiction avec  $0 \leq \ell < 1$ . Donc,  $\ell = 1$ .

---

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Posons  $a = \frac{2p\pi}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{PGCD}(p, q) = 1$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite  $u$  est donc  $q$ -périodique et de même la suite  $v$  est  $q$ -périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante (en effet, soient  $T$  une période strictement positive de  $u$  et  $\ell$  la limite de  $u$ . Soit  $k \in \{0, \dots, T-1\}$ .  $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \rightarrow |\ell - \ell| = 0$  quand  $n$  tend vers l'infini).

Or, si  $a = \frac{2p\pi}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{PGCD}(p, q) = 1$  et  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ , alors  $u_1 \neq u_0$  et la suite  $u$  n'est pas constante et donc diverge, et si  $a \in 2\pi\mathbb{Z}$ , la suite  $u$  est constante et donc converge.

2. (a) et b)) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na) \cos a + \cos(na) \sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque  $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ ,  $\sin a \neq 0$  et donc  $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$ . Par suite, si  $v$  converge alors  $u$  converge. De même, à partir de  $\cos((n+1)a) = \cos(na) \cos a - \sin(na) \sin a$ , on voit que si  $u$  converge alors  $v$  converge. Les suites  $u$  et  $v$  sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite  $u$  converge, alors la suite  $v$  converge. Soient  $\ell$  et  $\ell'$  les limites respectives de  $u$  et  $v$ . D'après ce qui précède,  $\ell$  et  $\ell'$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \sin a + \ell' (\cos a - 1) = 0 \\ \ell (\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut  $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$  car  $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Ce système admet donc l'unique solution  $\ell = \ell' = 0$  ce qui contredit l'égalité  $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ . Donc, les suites  $u$  et  $v$  divergent.

3. (a) Soit  $E' = \{na + 2k\pi, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ . Supposons que  $E'$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et montrons que  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  sont dense dans  $[-1, 1]$ .

Soient  $x$  un réel de  $[-1, 1]$  et  $b = \arccos x$ , de sorte que  $b \in [0, \pi]$  et que  $x = \cos b$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $n$  entier naturel et  $k$  entier relatif donnés, on a :

$$\begin{aligned} |u_n - x| &= |\cos(na) - \cos b| = |\cos(na + 2k\pi) - \cos b| = 2 \left| \sin\left(\frac{na + 2k\pi - b}{2}\right) \sin\left(\frac{na + 2k\pi + b}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{na + 2k\pi - b}{2} \right| \quad (1^\circ \text{ inégalité } |\sin x| \leq |x| \text{ valable pour tout réel } x \text{ est classique}) \\ &= |na + 2k\pi - b| \end{aligned}$$

En résumé,  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x| \leq |na + 2k\pi - b|$ . Maintenant, si  $E'$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , on peut trouver  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  tels que  $|na + 2k\pi - b| < \varepsilon$  et donc  $|u_n - x| < \varepsilon$ .

Finalement,  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ . De même, on montre que  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

Il reste donc à démontrer que  $E'$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Soit  $E = \{na + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ .  $E$  est un sous groupe non nul de  $(\mathbb{R}, +)$  et donc est soit de la forme  $\alpha\mathbb{Z}$  avec  $\alpha = \inf(E \cap ]0, +\infty[) > 0$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$  si  $\inf(E \cap ]0, +\infty[) = 0$ .

Supposons par l'absurde que  $\inf(E \cap ]0, +\infty[) > 0$ . Puisque  $E = \alpha\mathbb{Z}$  et que  $2\pi$  est dans  $E$ , il existe un entier naturel non nul  $q$  tel que  $2\pi = q\alpha$ , et donc tel que  $\alpha = \frac{2\pi}{q}$ .

Mais alors,  $a$  étant aussi dans  $E$ , il existe un entier relatif  $p$  tel que  $a = p\alpha = \frac{2p\pi}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$ . Ceci est exclu et donc,  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(c) Soit  $x$  dans  $[-1, 1]$ . D'après ce qui précède, pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|\cos(na) - x| < \varepsilon$  et donc  $|u_{|n|} - x| < \varepsilon$ , ce qui montre que  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ . De même,  $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

### Correction de l'exercice 29 ▲

Soit  $x$  dans  $[-1, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\theta = \arcsin x$  (donc  $\theta$  est élément de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $x = \sin \theta$ ). Pour  $k$  entier naturel non nul donné, il existe un entier  $n_k$  tel que  $\ln(n_k) \leq \theta + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$  à savoir  $n_k = E(e^{\theta + 2k\pi})$ .

Mais,

$$0 < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) = \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) < \frac{1}{n_k}$$

(d'après l'inégalité classique  $\ln(1+x) < x$  pour  $x > 0$ , obtenue par exemple par l'étude de la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ ). Donc,

$$0 \leq \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

puis

$$\begin{aligned} |\sin(\theta) - \sin(\ln(n_k))| &= 2 \left| \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi + \ln(n_k)}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2} \right| = |\theta + 2k\pi - \ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Soit alors  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Puisque  $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$  tend vers  $+\infty$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , on peut trouver un entier  $k$  tel que  $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$  et pour cet entier  $k$ , on a  $|\sin \theta - \sin(\ln(n_k))| < \varepsilon$ .

On a montré que  $\forall x \in [-1, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* / |x - \sin(\ln n)| < \varepsilon$ , et donc  $\{\sin(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

---

### Correction de l'exercice 30 ▲

Pour  $\alpha \in ]0, \pi[$ , posons  $f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)$ .  $\{(\sin(n\alpha), n \in \mathbb{N})\}$  est une partie non vide et majorée (par 1) de  $\mathbb{R}$ . Donc, pour tout réel  $\alpha$  de  $]0, \pi[$ ,  $f(\alpha)$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\alpha$  est dans  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq \sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Si  $\alpha$  est dans  $]0, \frac{\pi}{3}]$ . Soit  $n_0$  l'entier naturel tel que  $(n_0 - 1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$  ( $n_0$  existe car la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha = (n_0 - 1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq |\sin(n_0\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Si  $\alpha$  est dans  $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$ , on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n(\pi - \alpha))|) = f(\pi - \alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

car  $\pi - \alpha$  est dans  $]0, \frac{\pi}{3}]$ .

On a montré que  $\forall \alpha \in ]0, \pi[$ ,  $f(\alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Donc,  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$  existe dans  $\mathbb{R}$  et

$$\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = \text{Min}_{\alpha \in ]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$


---

### Correction de l'exercice 31 ▲

La suite  $u$  n'est pas majorée. Donc,  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / u_n > M$ . En particulier,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geq 0$ .

Soit  $k = 0$ . Supposons avoir construit des entiers  $n_0, n_1, \dots, n_k$  tels que  $n_0 < n_1 < \dots < n_k$  et  $\forall i \in \{0, \dots, k\}, u_{n_i} \geq i$ .

On ne peut avoir :  $\forall n > n_k, u_n < k + 1$  car sinon la suite  $u$  est majorée par le nombre  $\text{Max}\{u_0, u_1, \dots, u_{n_k}, k + 1\}$ .

Par suite,  $\exists n_{k+1} > n_k / u_{n_{k+1}} \geq k + 1$ .

On vient de construire par récurrence une suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  extraite de la suite  $u$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n_k} \geq k$  et en particulier telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = +\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 32 ▲

Si  $u$  converge vers un réel  $\ell$ , alors  $\ell \in [0, 1]$  puis, par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\ell(1 - \ell) \geq \frac{1}{4}$ , et donc  $(\ell - \frac{1}{2})^2 \leq 0$  et finalement  $\ell = \frac{1}{2}$ . Par suite, si  $u$  converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ . De plus, puisque la suite  $u$  est à valeurs dans  $]0, 1[$ , pour  $n$  naturel donné, on a :

$$u_n(1 - u_n) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - u_n)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1 - u_n),$$

et puisque  $1 - u_n > 0$ , on a donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < u_{n+1}$ .

$u$  est croissante et majorée. Donc  $u$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$  (amusant).

---