



## Les rationnels, les réels

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 I

---

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

- (\*\*)  $\sqrt{2}$  et plus généralement  $\sqrt[n]{m}$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $m$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance  $n$ -ième parfaite.
- (\*\*)  $\log 2$ .
- (\*\*\*\*)  $\pi$  (LAMBERT a montré en 1761 que  $\pi$  est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que  $\pi^2$  est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que  $\pi$  est transcendant).  
Pour cela, supposer par l'absurde que  $\pi = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers naturels non nuls et premiers entre eux.  
Considérer alors  $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n (p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrer que  $I_n$  vérifie
  - $I_n$  est un entier relatif ;
  - $I_n > 0$  ;
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  (voir devoir).
- (\*\*\*\*)  $e$  (HERMITE a démontré en 1873 que  $e$  est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).  
Pour cela, établir que pour tout entier naturel  $n$ ,  $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$ , puis que **pour tout** entier naturel non nul  $n$ ,  $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$ . Raisonner alors par l'absurde.
- (\*\*\*\*)  $\cos(\frac{2\pi}{7})$ . Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont  $\cos(\frac{2\pi}{7})$ ,  $\cos(\frac{4\pi}{7})$  et  $\cos(\frac{6\pi}{7})$ , puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{PGCD}(p, q) = 1$  et montrer que  $p$  divise 1 et  $q$  divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs tous non nuls. Si  $a$  divise  $bc$  et  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  divise  $c$ ).
- (\*\*\*\*)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

[Correction ▼](#)

[005209]

### Exercice 2 \*\*IT

---

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ , non vides et bornées. Montrer que  $\sup A$ ,  $\sup B$ ,  $\sup(A+B)$ ,  $\inf A$ ,  $\inf B$ ,  $\inf(A+B)$  existent et que l'on a  $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$  et  $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ . ( $A+B$  désigne l'ensemble des sommes d'un élément de  $A$  et d'un élément de  $B$ ).

[Correction ▼](#)

[005210]

### Exercice 3 \*\*

---

Soit  $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Déterminer  $\sup A$  et  $\inf A$ .

[Correction ▼](#)

[005211]

**Exercice 4 \*\*IT**

Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\sup\{|x - y|, (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$ .

[Correction ▼](#)

[005212]

**Exercice 5 \*\*\*IT**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ . Que dire de  $\sup(A \cap B)$ ,  $\sup(A \cup B)$ ,  $\sup(A + B)$  et  $\sup(AB)$ ? ( $A + B$  (resp.  $AB$ ) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de  $A$  et d'un élément de  $B$ ).

[Correction ▼](#)

[005213]

**Exercice 6 \*\*\*\***

Soit  $u_n$  le chiffre des unités de  $C_n^k$ ,  $k$  entier naturel fixé non nul et  $n$  entier naturel supérieur ou égal à  $k$ . Montrer que le nombre  $0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$  est rationnel.

[Correction ▼](#)

[005214]

**Exercice 7 \*\* Identité de CATALAN**

Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

[Correction ▼](#)

[005215]

**Exercice 8 \*\*I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI**

Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  des nombres réels.

1. En considérant la fonction  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + x b_k)^2$ , montrer que  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$  (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI :  $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ .  
(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

[Correction ▼](#)

[005216]

**Exercice 9 \*\***

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1$ .

[Correction ▼](#)

[005217]

**Exercice 10 \*\*\*\* Sous groupes de  $(\mathbb{R}, +)$** 

1. Montrer que les sous groupes du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  sont soit de la forme  $a\mathbb{Z}$ ,  $a$  réel donné, soit denses dans  $\mathbb{R}$ .  
Indication : pour  $G$  sous-groupe donné de  $(\mathbb{R}, +)$ , non réduit à  $\{0\}$ , considérer  $a = \inf(G \cap ]0; +\infty[)$  puis envisager les deux cas  $a = 0$  et  $a > 0$ .  
(Definition :  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si :  $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / |y - x| < \varepsilon)$ ).
2. Application 1. Montrer que  $\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
  - (a) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'ensemble des périodes de  $f$  est un sous groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  (ce sous-groupe est réduit à  $\{0\}$  si  $f$  n'est pas périodique).
  - (b) Montrer qu'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui admet 1 et  $\sqrt{2}$  pour périodes, est constante sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005218]

**Exercice 11 \*\***

Montrer que  $\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005219]

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si  $b = 1$ ,  $m = a^n$  et  $m$  est une puissance  $n$ -ième parfaite. Ensuite,  $a = 1$  est impossible car  $m \times b^n \geq 2$ . Supposons alors que  $a$  et  $b$  soient des entiers supérieurs à 2 (et que  $a^n = m \times b^n$ ). L'exposant de tout facteur premier de  $a^n$  ou de  $b^n$  est un multiple de  $n$  et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de  $m$ . Ceci montre que, si  $\sqrt[n]{m}$  est rationnel,  $m$  est une puissance  $n$ -ième parfaite. Réciproquement, si  $m$  est une puissance  $n$ -ième parfaite,  $\sqrt[n]{m}$  est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2, \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n\text{-ième parfaite.}$$

Par suite, si  $m$  n'est pas une puissance  $n$ -ième parfaite,  $\sqrt[n]{m}$  est irrationnel.

2.

$$\begin{aligned} \log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 5^a = 2^{b-a}. \end{aligned}$$

Puisque  $5^a > 1$ , ceci impose  $b - a \in \mathbb{N}^*$ . Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a montré par l'absurde que

$$\log 2 \text{ est irrationnel.}$$

3. Supposons par l'absurde que  $\pi$  soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$  tels que  $\pi = \frac{p}{q}$ . Pour  $n$  entier naturel non nul donné, posons

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx.$$

• Tout d'abord, pour  $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$ , on a  $0 \leq x(p - qx) = \frac{p}{2q} \left( p - \frac{p}{2q} \times q \right) = \frac{p^2}{4q}$ , et donc (puisque  $0 \leq \sin x \leq 1$  pour  $x \in [0, \pi]$ ),

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} \left( \frac{p^2}{4q} \right)^n dx = \frac{\pi}{n!} \left( \frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé,  $\frac{\pi}{n!} \left( \frac{p^2}{4q} \right)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite  $(I_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ . • Ensuite, puisque pour  $x$  élément de  $[0, \pi]$ , on a  $x^n (p - qx)^n \sin x \geq 0$ , pour  $n$  entier naturel non nul donné, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left( \frac{p}{4q} \left( p - \frac{p}{4q} \times q \right) \right)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}n!} \left( \frac{3p^2}{16q} \right)^n > 0. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n > 0$ . • Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n$  est un entier (relatif). Soit  $P_n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$ .  $P_n$  est un polynôme de degré  $2n$  et 0 et  $\frac{p}{q}$  sont racines d'ordre  $n$  de  $P_n$  et donc, pour  $0 \leq k \leq n$ , racines d'ordre  $n - k$  de  $P_n^{(k)}$ . En particulier,  $P_n^{(k)}(0)$  et  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$  sont, pour  $0 \leq k < n$ , des entiers relatifs. De même, puisque  $\deg P_n = 2n$ , pour  $k \geq 2n + 1$ ,  $P_n^{(k)} \geq 0$  et en particulier,  $P_n^{(k)}(0)$  et  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$  sont, pour  $k \geq 2n + 1$ , des entiers relatifs. Soit  $k$  un entier tel que  $n \leq k \leq 2n$ .

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n \sum_{i=0}^n C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^n \frac{C_n^i}{n!} p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{C_n^{k-n}}{n!} p^{2n-k}(-1)^{k-n} q^{k-n} x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times (\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n} \frac{k!}{n!} C_n^{k-n} p^{2n-k} q^{k-n}.$$

ce qui montre que  $P_n^{(k)}(0)$  est entier relatif (puisque  $n \leq k \leq 2n$ ). Puis, comme  $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = P_n(x)$ , on a encore  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q} - x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$  et en particulier  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ . On a montré que pour tout entier naturel  $k$ ,  $P_n^{(k)}(0)$  et  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$  sont des entiers relatifs. Montrons alors que  $I_n$  est un entier relatif. Une première intégration par parties fournit :  $I_n = [-P_n(x) \cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x dx$ .  $\cos$  prend des valeurs entières en 0 et  $\frac{p}{q} = \pi$  de même que  $P_n$ . Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit :  $\int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x dx = [P_n'(x) \sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x dx$ .  $\sin$  prend des valeurs entières en 0 et  $\frac{p}{q} = \pi$ , de même que  $P_n'$  et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque  $\sin$  et  $\cos$  prennent des valeurs entières en 0 et  $\pi$  de même que les dérivées successives de  $P_n$ , on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x dx = \int_0^{p/q} \frac{1}{n!} (-q)^n (2n)! \sin x dx = 2(-q)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel  $n$ ,  $I_n$  est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel  $n$ ,  $I_n \geq 1$ . Cette dernière constatation contredit le fait que la suite  $(I_n)$  converge vers 0. L'hypothèse  $\pi$  est rationnel est donc absurde et par suite,

$\pi$  est irrationnel.

4. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ . • Pour  $n = 0$ ,  $\int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t dt = \int_0^1 e^t dt = e - 1$  et donc,  $e = 1 + \int_0^1 e^t dt = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t dt$ . • Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ . Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = \left[ -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Soit  $n$  un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que  $e$  soit rationnel. Alors, il existe  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / e = \frac{a}{b}$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a  $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$ , ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par  $bn!$

$$0 < a \times n! - b \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour  $n = 3b$ , on a  $0 < a \times (3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$ . Mais ceci est impossible car  $a \times n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$  est un entier relatif. Il était donc absurde de supposer que  $e$  est rationnel et finalement,

$e$  est irrationnel.

5. Une équation du troisième degré dont les solutions sont  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  et  $\cos \frac{6\pi}{7}$  est

$$(X - \cos \frac{2\pi}{7})(X - \cos \frac{4\pi}{7})(X - \cos \frac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left( \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) X^2 + \left( \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) X - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients. Soit  $\omega = e^{2i\pi/7}$ . Puisque  $\omega^7 = 1$  et que  $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$ , on a d'après les formules d'EULER

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4)) \\ &= \frac{1}{4}((\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3) + (\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2)) \\ &= \frac{2(-1)}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4) \\ &= \frac{1}{8}(\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4)(\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8}(\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Les trois nombres  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{7}$  et  $\cos \frac{6\pi}{7}$  sont donc solution de l'équation  $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$  ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour  $p$  entier relatif non nul et  $q$  entier naturel non nul tels que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, le nombre  $r = \frac{p}{q}$  est racine de cette équation, alors  $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$ . Ceci peut encore s'écrire  $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$  ce qui montre que  $q$  divise  $8p^3$ . Comme  $q$  est premier avec  $p$  et donc avec  $p^3$ , on en déduit d'après le théorème de GAUSS que  $q$  divise 8. De même, l'égalité  $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$  montre que  $p$  divise  $q^3$  et donc que  $p$  divise 1. Ainsi,  $p \in \{-1, 1\}$  et  $q \in \{1, 2, 4, 8\}$  ou encore  $r \in \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\}$ . On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$\cos \frac{2\pi}{7}$  est irrationnel.

6. On sait que  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{5}$  sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ . Soit  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15} \\ &\Rightarrow (\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6)^2 = 60 \Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que  $\alpha$  est rationnel, puisque  $\sqrt{2}$  est irrationnel, on a nécessairement  $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$  (dans le cas contraire,  $\sqrt{2} = \frac{\alpha^4 + 8\alpha^2 - 24}{4\alpha(\alpha^2 - 6)} \in \mathbb{Q}$ ). Mais  $\alpha$  n'est ni 0, ni  $-\sqrt{6}$ , ni  $\sqrt{6}$  (car  $\alpha^2 > 2 + 3 + 5 = 10 > 6$ ). Donc

$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  est irrationnel.

### Correction de l'exercice 2 ▲

$A$  et  $B$  sont deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$  et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour tout  $(a, b) \in A \times B$ , on a  $a + b \leq \alpha + \beta$ . Ceci montre que  $A + B$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , et donc que  $\sup(A + B)$  existe dans  $\mathbb{R}$ . (De plus, puisque  $\alpha + \beta$  est un majorant de  $A + B$ , on a déjà  $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$ ). Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \alpha$  et  $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq \beta$ , et donc tels que  $\alpha + \beta - \varepsilon < a + b \leq \alpha + \beta$ .

En résumé,

$$(1) \forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \alpha + \beta \text{ et } (2) \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\sup(A + B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B.$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles  $-A$  et  $-B$  car  $\inf A = -\sup(-A)$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Posons pour  $n$  entier naturel non nul  $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$  de sorte que  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \{0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\}$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2}$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-1 < u_{2n-1} \leq 0$ . Par suite,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-1 < u_n \leq \frac{3}{2}$ . Donc,  $\sup A$  et  $\inf A$  existent dans  $\mathbb{R}$  et de plus  $-1 \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{3}{2}$ . Ensuite,  $\frac{3}{2} = u_2 \in A$ . Donc,

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}.$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul  $n$ , on a  $-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$ . On fait tendre  $n$  tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\inf A = -1$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

### Correction de l'exercice 4 ▲

Posons  $B = \{|y-x|, (x,y) \in A^2\}$ .  $A$  est une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ , et donc  $m = \inf A$  et  $M = \sup A$  existent dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $(x,y) \in A^2$ , on a  $m \leq x \leq M$  et  $m \leq y \leq M$ , et donc  $y-x \leq M-m$  et  $x-y \leq M-m$  ou encore  $|y-x| \leq M-m$ . Par suite,  $B$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .  $B$  admet donc une borne supérieure. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $(x_0, y_0) \in A^2$  tel que  $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$  et  $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ . Ces deux éléments  $x_0$  et  $y_0$  vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

1.  $\forall (x,y) \in A^2, |y-x| \leq \sup A - \inf A$  et
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists (x,y) \in A^2 / |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$ .

Donc,  $\sup B = \sup A - \inf A$ .

$$\sup \{|y-x|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

1.  $A \cap B$  peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc  $A \cap B$  non vide. Pour  $x \in A \cap B$ , on a  $x \leq \sup A$  et  $x \leq \sup B$  et donc  $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ . Dans ce cas,  $\sup(A \cap B)$  existe et  $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ . On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  et  $B = ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$ . On a  $\sup A = 1$ ,  $\sup B = 1$ ,  $A \cap B = \{0\}$  et donc  $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$ .
2. Pour  $x \in A \cup B$ , on a  $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ . Donc  $\sup(A \cup B)$  existe dans  $\mathbb{R}$  et  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ . Inversement, supposons par exemple  $\sup A \geq \sup B$  de sorte que  $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $a \in A$  tel que  $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$ .  $a$  est dans  $A$  et donc dans  $A \cup B$ . En résumé,  $\forall x \in (A \cup B), x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in (A \cup B) / \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$  et donc

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

3. D'après l'exercice 2,  $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ .
4. Pour  $\sup(AB)$ , tout est possible. Par exemple, si  $A = B = ]-\infty, 0]$  alors  $\sup A = \sup B = 0$ , mais  $AB = [0, +\infty[$  et  $\sup(AB)$  n'existe pas dans  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soient  $k$  un entier naturel non nul et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à  $k$ .

$$\begin{aligned} \binom{n+10 \times k!}{k} &= \frac{(n+10 \times k!)(n+10 \times k! - 1) \dots (n+10 \times k! - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) + 10 \times k! \times K}{k!} \quad (\text{pour un certain entier } K) \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} + 10K = \binom{n}{k} + 10K. \end{aligned}$$

La différence  $\binom{n+10 \times k!}{k} - \binom{n}{k}$  est donc divisible par 10. Par suite,  $\binom{n+10 \times k!}{k}$  et  $\binom{n}{k}$  ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi,  $\forall n \geq k, u_{n+10 \times k!} = u_n$  et donc la suite  $u$  est donc  $10k!$ -périodique. On sait alors que

$$0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots \text{ est rationnel.}$$



---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

Pour  $n = 1$ ,  $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  et  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ . L'identité proposée est donc vraie pour  $n = 1$ .

Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que  $\forall n \geq 1$ ,  $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$  (identité de CATALAN).

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

1. Si les  $b_k$  sont tous nuls, l'inégalité est claire. Sinon, pour  $x$  réel, posons

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

$f$  est un trinôme du second degré de signe constant sur  $\mathbb{R}$ . Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

ou encore  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ , qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

et donc,  $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ , qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

Pour  $x \geq 1$ ,  $x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 0$ . De même,  $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$ . Donc, si on pose  $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ ,  $f(x)$  existe si et seulement  $x \geq 1$  et pour  $x \geq 1$ ,  $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|$ . Par suite,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} = 1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

1. Soit  $G$  un sous groupe non nul de  $(\mathbb{R}, +)$  ( $\{0\} = 0.\mathbb{Z}$  est du type voulu). Il existe dans  $G$  un réel non nul  $x_0$ . Puisque  $G$  est un sous groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , le réel  $-x_0$  est aussi dans  $G$  et l'un des deux réels  $x_0$  ou  $-x_0$  est strictement positif. Soit alors  $A = G \cap ]0, +\infty[$ . D'après ce qui précède,  $A$  est une partie non vide et minorée (par 0) de  $\mathbb{R}$ .  $A$  admet donc une borne inférieure que l'on note  $a$ .

**1er cas.** Si  $a = 0$ , montrons dans ce cas que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$  (c'est par exemple le cas de  $(\mathbb{Q}, +)$ ). Soient  $x$  un réel et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Puisque  $\inf A = \inf(G \cap ]0, +\infty[) = 0$ , il existe dans  $G$  un élément  $g$  tel que  $0 < g < \varepsilon$ . Puis il existe un entier relatif  $n$  tel que  $ng \leq x - \varepsilon < (n+1)g$  à savoir  $n = E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$ . Soit  $y = (n+1)g$ . D'une part,  $y$  est dans  $G$  (si  $n+1 = 0$ ,  $(n+1)g = 0 \in G$ , si  $n+1 > 0$ ,  $(n+1)g = g + g + \dots + g \in G$  et si  $n+1 < 0$ ,  $(n+1)g = -(-(n+1)g) \in G$ ) et d'autre part

$$x - \varepsilon < (n+1)g = ng + g < x - \varepsilon + \varepsilon = x.$$

On a montré que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / x - \varepsilon < y < x$  et donc

si  $G \neq \{0\}$  et si  $\inf(G \cap ]0, +\infty[) = 0$ ,  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**2ème cas.** Si  $a > 0$ , montrons dans ce cas que  $G = a\mathbb{Z}$ . Pour cela, montrons tout d'abord que  $a$  est dans  $G$ . Mais si  $a$  n'est pas élément de  $G$ , par définition de  $a$ , il existe un réel  $x$  dans  $G \cap ]a, 2a[$  puis il existe un réel  $y$  dans  $G \cap ]a, x[$ . Le réel  $x - y$  est alors dans  $G \cap ]0, a[$  ce qui est impossible. Donc  $a$  est élément de  $G$ . Montrons alors que  $G = a\mathbb{Z}$ . Puisque  $a$  est dans  $G$ ,  $G$  contient encore  $a + a = 2a$ , puis  $a + a + a = 3a$  et plus généralement tous les  $na, n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $G$  contient aussi les opposés de ces nombres et également  $0 = 0 \times a$ ,  $G$  contient finalement tous les  $na, n \in \mathbb{Z}$ . On a ainsi montré que  $a\mathbb{Z} \subset G$ . Réciproquement, soit  $x$  un élément de  $G$  et  $n = E\left(\frac{x}{a}\right) (\in \mathbb{Z})$ . Alors,  $n \leq \frac{x}{a} < n+1$  puis  $0 \leq x - na < a$ . Or,  $x$  est dans  $G$  et  $na$  est dans  $G$ . Donc,  $x - na$  est dans  $G \cap ]0, a[ = \{0\}$ , puis  $x = na \in a\mathbb{Z}$ . On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc  $G = a\mathbb{Z}$ .

si  $\inf(G \cap ]0, +\infty[) = a > 0$ ,  $G = a\mathbb{Z}$ .

2. Soit  $G = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . On vérifie aisément que  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel  $n$ ,

$$(\sqrt{2} - 1)^n \in G \cap ]0, +\infty[.$$

Or,  $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$ . Ceci montre que  $\inf(G \cap ]0, +\infty[) = 0$  et donc que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

3. (a) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $G_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$ . 0 est élément de  $G_f$  (et c'est même le seul élément de  $G_f$  si  $f$  n'est pas périodique) et donc  $G \neq \emptyset$ . De plus, si  $T$  et  $T'$  sont deux éléments de  $G$  alors, pour  $x$  réel donné :

$$f(x + (T - T')) = f((x - T') + T) = f(x - T') = f(x - T' + T') = f(x),$$

et  $T - T'$  est encore un élément de  $G$ . On a montré que

$G_f$  est un sous groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

- (b) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  admettant 1 et  $\sqrt{2}$  pour périodes.  $G_f$  contient encore tous les nombres de la forme  $a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2$  et est donc dense dans  $\mathbb{R}$ . Montrons que si de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est constante. Soit  $x$  un réel quelconque. On va montrer que  $f(x) = f(0)$ . Remarque préliminaire : soit  $T$  une période strictement positive de  $f$ . Il existe un entier relatif  $p$  tel que  $pT \leq x < (p+1)T$  à savoir  $p = E\left(\frac{x}{T}\right)$ . On a alors  $f(x) = f(x - pT)$  avec  $0 \leq x - pT < T$ . Soit alors  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $G_f$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe dans  $G_f$  un réel  $T_n$  tel que  $0 < T_n < \frac{1}{n}$  (ce qui implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$ ). Mais alors, puisque  $0 < x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n < T_n$ , on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n = 0$ . Maintenant, la suite  $\left(f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $f(x)$  et donc convergente vers  $f(x)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right)\right) \quad (\text{par continuité de } f \text{ en } 0) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

---

Soient  $x$  un réel et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. On a  $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x + \varepsilon}$ . Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe un rationnel  $r$  tel que  $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x + \varepsilon}$  et donc tel que  $x < r^3 < x + \varepsilon$ , par stricte croissance de la fonction  $t \mapsto t^3$  sur  $\mathbb{R}$ . On a montré que

$\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

---