



Géométrie du plan

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I

(ABC) est un vrai triangle.

1. Montrer que ses médianes sont concourantes en G l'isobarycentre de (ABC) .
2. Montrer que ses médiatrices sont concourantes en O le centre du cercle circonscrit à (ABC) .
3. Montrer que ses hauteurs sont concourantes en H l'orthocentre de (ABC) puis montrer la relation d'EULER :
 $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (considérer l'homothétie de centre G et de rapport -2).
4. Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en I le centre du cercle inscrit.

[Correction ▼](#)

[005195]

Exercice 2 **IT

On donne les points $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ et $C(0, 4)$.

1. Déterminer \widehat{BAC} au degré près.
2. Déterminer l'aire du triangle (ABC) .
3. Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4. Déterminer une équation des bissectrices de l'angle \widehat{BAC} puis de la bissectrice intérieure à l'angle \widehat{A} .

[Correction ▼](#)

[005196]

Exercice 3 *IT

Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite (D) d'équation $x + 3y - 5 = 0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

[Correction ▼](#)

[005197]

Exercice 4 *

Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) .

[Correction ▼](#)

[005198]

Exercice 5 **

Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$. Montrer que (E) est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par O .

[Correction ▼](#)

[005199]

Exercice 6 **

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

[Correction ▼](#)

[005200]

Exercice 7 **I

1. h (resp. h') est l'homothétie de centre Ω et de rapport k (resp. k') non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.
2. s (resp. s') est la symétrie centrale de centre Ω (resp. Ω'). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
3. s est la symétrie centrale de centre Ω et t est la translation de vecteur \vec{u} . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

[Correction ▼](#)

[005201]

Exercice 8 *I**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, puis A_1, A_2, \dots, A_n n points du plan. Existe-t-il n points B_1, B_2, \dots, B_n tels que, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ (avec la convention $B_{n+1} = B_1$) ? (Utiliser l'exercice précédent.)

[Correction ▼](#)

[005202]

Exercice 9 *T

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

1. Déterminer une équation de la tangente au point de \mathcal{C} de coordonnées $(2, -2 + \sqrt{3})$.
2. Déterminer l'intersection de \mathcal{C} et du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2.

[Correction ▼](#)

[005203]

Exercice 10 * Théorème de MÉNÉLAÛS**

Soient A, B et C trois points non alignés. Soient M, N et P trois points appartenant respectivement aux droites (BC) , (CA) et (AB) et distincts de A, B et C . Montrer que :

$$(M, N, \text{ et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de THALÈS, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

[Correction ▼](#)

[005204]

Exercice 11 ***

Construire l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)}} \text{ (commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).}$$

[Correction ▼](#)

[005205]

Exercice 12 **

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

[Correction ▼](#)

[005206]

Exercice 13 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1 - i)z + 2 + i$

[Correction ▼](#)

[005207]

Exercice 14 ** Faisceaux de droites

1. Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'équation respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a', b') \neq (0, 0)$. Soit (Δ) une droite. Montrer que (D) , (D') et (Δ) sont concourantes si et seulement si il existe (λ, μ) a une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
2. Equation cartésienne de la droite passant par le point $(1, 0)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives $5x + 7y + 1 = 0$ et $-3x + 2y + 1 = 0$
3. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère (D_m) la droite d'équation $(2m - 1)x + (m + 1)y - 4m - 1 = 0$. Montrer que les droites (D_m) sont concourantes en un point A que l'on précisera. Toute droite passant par A est-elle une droite (D_m) ?

[Correction ▼](#)

[005208]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit G l'isobarycentre du triangle (ABC) . On a donc $G = \text{bar}(A(1), B(1), C(1))$. Notons A' , B' et C' les milieux respectifs des côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. D'après le théorème du barycentre partiel, $G = \text{bar}(A(1), A'(2))$. En particulier, G est sur la médiane (AA') . De même, G est sur la médiane (BB') et sur la médiane (CC') .

Finalement, G est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en G .

2. Les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés $[B, C]$ et $[C, A]$ ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note O . Par définition de O , on a $OA = OB = OC$. O est donc à égale distance de A et B et est ainsi sur la médiatrice de $[A, B]$. Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en O . De plus, O étant à égale distance de A , B et C , le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C .

Réciproquement, un cercle passant par A , B et C a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre O et de rayon OA . Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle (ABC) : c'est le cercle de centre O et de rayon OA .

3. Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2 . Puisque $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA}$, on a $h(A') = A$ et de même $h(B') = B$ et $h(C') = C$.

Par h , l'image de la médiatrice de $[B, C]$, c'est-à-dire de la droite passant par A' et perpendiculaire à (BC) est la droite passant par $h(A') = A$ et perpendiculaire à (BC) (car parallèle à la médiatrice de $[B, C]$). Cette droite est la hauteur issue de A du triangle (ABC) . De même, les images des médiatrices de $[C, A]$ et $[A, B]$ sont respectivement les hauteurs issues de B et C .

Le point O est sur les trois médiatrices. Son image par h est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté H et appelé l'orthocentre du triangle (ABC) . De plus, l'égalité $h(O) = H$ s'écrit $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ ou encore $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ ou enfin,

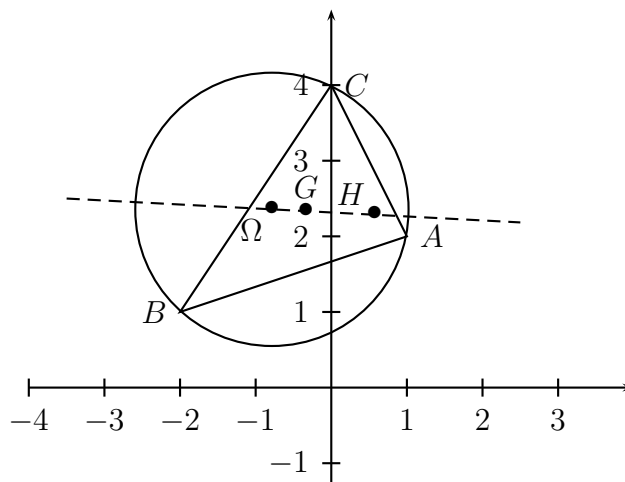
$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \text{ EULER.}}$$

Les trois points O , G et H , s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'EULER** du triangle (ABC) .

4. Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le) et sont donc sécantes en un point I à égale distance des trois côtés et à l'intérieur du triangle (ABC) . Ce point étant à égale distance des trois côtés est centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

Correction de l'exercice 2 ▲

(Notez bien l'alignement des points G , H et O).



1. On a $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{(-3)(-1) + (-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite, $\widehat{BAC} = 81^\circ$ à un degré près.

2. $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \text{abs} \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = \frac{7}{2}.$

3. Notons G l'isobarycentre du triangle (ABC) . $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(1 + 2i - 2 + i + 4i) = \frac{1}{3}(-1 + 7i)$,

et donc $G(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}).$

Notons (x, y) les coordonnées de Ω , le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) (dans cette exercice, la lettre O désigne certainement l'origine du repère).

$$\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 4y = -11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de CRAMER),}$$

et donc

$\Omega(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}).$

Notons (x, y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle (ABC) .

1ère solution.

$$\begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 3(y-2) = 0 \\ -(x+2) + 2(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de CRAMER),}$$

et donc, $H(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}).$

2ème solution. Il est bien meilleur de connaître la relation d'EULER $\vec{\Omega H} = 3\vec{\Omega G}$ et de l'utiliser.

$$H = \Omega + 3\vec{\Omega G} = \left(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14} \right) + 3 \left(\frac{-\frac{1}{3} + \frac{11}{14}}{\frac{7}{3} - \frac{33}{14}} \right) = \left(\frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right).$$

Pour trouver le cercle circonscrit au triangle (ABC) , on a déjà le centre Ω et le rayon

$$\Omega A = \sqrt{\left(1 + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(2 - \frac{33}{14}\right)^2} = \frac{1}{14} \sqrt{25^2 + 5^2} = \frac{5}{14} \sqrt{5^2 + 1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$\left(x + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{14}\right)^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2 + y^2 + \frac{11}{7}x - \frac{33}{7}y + \frac{20}{7} = 0.$$

Néanmoins, on peut trouver directement une équation de ce cercle. Les points A , B et C n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.

Soient alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et \mathcal{C} le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$(A, B, C) \in \mathcal{C}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = -5 \\ -2a + b + c = -5 \\ 4b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b - 16a - 2b = 11 \\ -2a - 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{7} \\ b = -\frac{33}{7} \\ c = \frac{20}{7} \end{cases} \text{ (CRAMER)}$$

4. Les bissectrices de l'angle A sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites (AB) et (AC) . Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1(1, -3)$ et $\vec{n}_2(2, 1)$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) = d(M, (AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1)^2}{\|\vec{n}_1\|^2} = \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2)^2}{\|\vec{n}_2\|^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{((x-1) - 3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1) + (y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x-3y+5)^2 = 2(2x+y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow [(x-3y+5) + \sqrt{2}(2x+y-4)] \cdot [(x-3y+5) - \sqrt{2}(2x+y-4)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2})x + (-3+\sqrt{2})y + 5 - 4\sqrt{2} = 0 \text{ ou } (1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} \text{ ou } y = (1-\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

La bissectrice intérieure δ_A de l'angle \widehat{A} est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par $A(2, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = -\sqrt{10} \cdot \left(\frac{1}{AB}\vec{AB} + \frac{1}{AC}\vec{AC}\right)$. Ce vecteur a pour coordonnées $(3 + \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sqrt{2})(x-1) - (3 + \sqrt{2})(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sqrt{2})x - (3 + \sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = (1 - \sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $(1, 3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0 + \lambda, y_0 + 3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda \cdot \vec{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0 + \lambda) + 3(y_0 + 3\lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $\left(x_0 + \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}, y_0 + 3 \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}\right)$ ou encore $\left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10}, \frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10}\right)$.

Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0 p(M_0)}$.

Ses coordonnées sont donc $\left(x_0 + 2\left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10} - x_0\right), y_0 + 2\left(\frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10} - y_0\right)\right)$ ou encore

$$\left(\frac{4x_0-3y_0+5}{5}, \frac{-3x_0-4y_0+15}{5}\right).$$

(Remarque. Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$ on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$ appartient à (D) .)

Correction de l'exercice 4 ▲

Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) sont donc $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

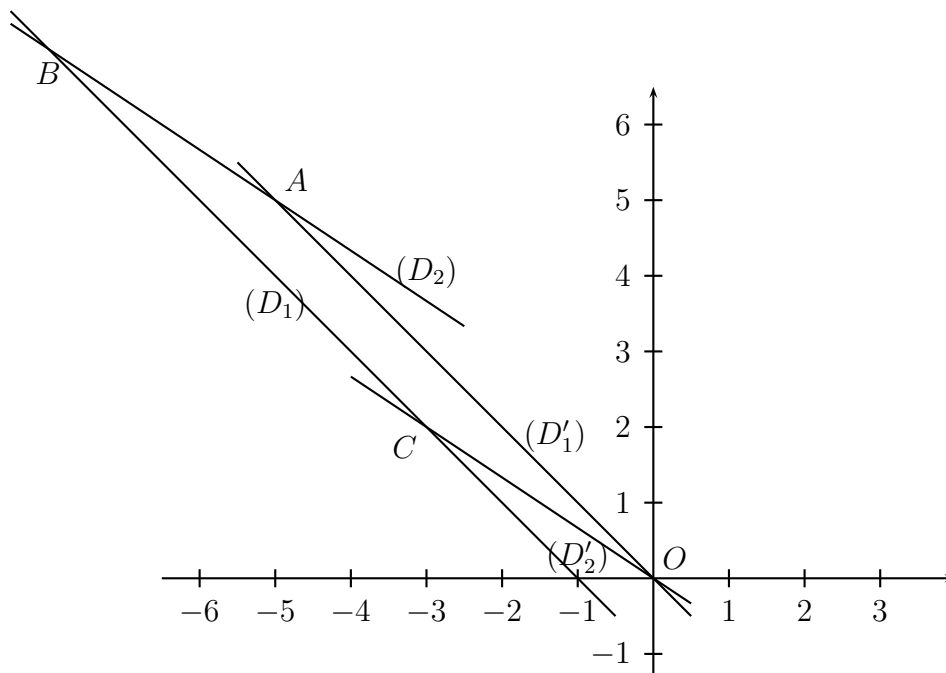
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 &= 2x^2 + x(5y - 3) + 3y^2 - 2y - 5 = 2\left(x + \frac{1}{4}(5y - 3)\right)^2 - \frac{1}{8}(5y - 3)^2 + 3y^2 - 2y - 5 \\ &= \frac{1}{8}(4x + 5y - 3)^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{14}{8}y - \frac{49}{8} \\ &= \frac{1}{8}[(4x + 5y - 3)^2 - (y^2 - 14y + 49)] = \frac{1}{8}[(4x + 5y - 3)^2 - (y - 7)^2] \\ &= \frac{1}{8}(4x + 4y + 4)(4x + 6y - 10) = (x + y + 1)(2x + 3y - 5) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3y - 5 = 0).$$

(E) est la réunion de la droite (D_1) d'équation $x + y + 1 = 0$ et de la droite (D_2) d'équation $2x + 3y - 5 = 0$.



La parallèle à (D_1) passant par O est la droite (D'_1) d'équation $x + y = 0$ et la parallèle à (D_2) passant par O est la droite (D'_2) d'équation $2x + 3y = 0$. Ces droites se coupent en les quatre points $O(0, 0)$, $A(-5, 5)$, $B(-8, 7)$ et $C(-3, 2)$. L'aire de ce parallélogramme vaut $|\det(\vec{OA}, \vec{OC})| = 5$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons (D_1) , (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x$. Soit \mathcal{C} un cercle.

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, \mathcal{C} est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y = 2x + 4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2) , ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1) , par exemple $(0, 1)$, à (D_2) . Cette distance vaut $\frac{|2 \cdot 0 - 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, \mathcal{C} est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a, 2a + 4)$, $a \in \mathbb{R}$, et son rayon vaut $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \text{ solution} &\Leftrightarrow d(\Omega, (D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a + 2(2a + 4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a + 8| = 3 \\ &\Leftrightarrow 5a + 8 = 3 \text{ ou } 5a + 8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -\frac{11}{5} \end{aligned}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle \mathcal{C}_1 de centre $\Omega_1(-1, 2)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle \mathcal{C}_2 de centre $\Omega_2(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soient k et k' deux réels non nuls, Ω et Ω' deux points (pas nécessairement distincts), puis h (resp. h') l'homothétie de centre Ω (resp. Ω') et de rapport k (resp. k').

Soient M un point du plan, puis $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M')$.

$$M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' M'} = \Omega' + k' (\overrightarrow{\Omega' \Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}) = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega M} \quad (*)$$

Chechons alors les points invariants par $h' \circ h$.

$$\begin{aligned} h' \circ h(M) = M &\Leftrightarrow \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega M} = M \Leftrightarrow -\overrightarrow{\Omega' M} + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (kk' - 1) \overrightarrow{\Omega M} = (k' - 1) \overrightarrow{\Omega \Omega'} \quad (**) \end{aligned}$$

1er cas. Si $kk' \neq 1$, $(**) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k' - 1}{kk' - 1} \overrightarrow{\Omega \Omega'}$, ce qui signifie que l'équation $(**)$ a une et eune seule solution que l'on note Ω'' , ou encore $h' \circ h$ a un et un seule point invariant, le point Ω'' tel que $\Omega'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega \Omega''}$.

Mais alors, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M

$$M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega M} = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + kk' \overrightarrow{\Omega \Omega''} + kk' \overrightarrow{\Omega'' M} = \Omega'' + kk' \overrightarrow{\Omega'' M}.$$

$h' \circ h$ est donc l'homothétie de rapport kk' et de centre Ω'' . On doit noter que le centre Ω'' est sur la droite $(\Omega \Omega')$.

Si $kk' \neq 1$, $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk' .

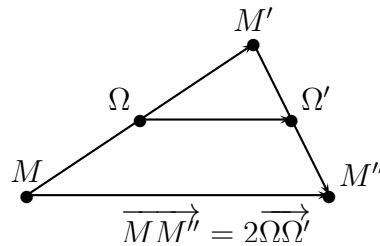
2ème cas. Si $kk' = 1$, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M , $M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et donc

$$\overrightarrow{MM''} = \Omega' + k' (\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1 - k') \overrightarrow{\Omega \Omega'}.$$

Dans ce cas, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1 - k') \overrightarrow{\Omega \Omega'}$.

En résumé, **la composée de deux homothéties de rapport respectifs k et k' tous deux non nuls est une homothétie de rapport kk' si $kk' \neq 1$ et une translation si $kk' = 1$** (ce résultat est à connaître).

2. C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1 . Puisque $(-1)(-1) = 1$, $s' \circ s$ est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{\Omega s' \circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composée de deux symétries centrales est une translation.

3. Soit Ω' le point tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2}\vec{u}$. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω' . D'après 2), $s \circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega} = \vec{u}$. Par suite, $s \circ t = s \circ s \circ s' = s'$.

La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour $1 \leq i \leq n$, notons s_i la symétrie centrale de centre A_i . Le problème revient à trouver n points B_1, \dots, B_n tels que $B_2 = s_1(B_1)$, $B_3 = s_2(B_2), \dots, B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1 = s_n(B_n)$. Ceci équivaut à

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, B_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ \dots \circ s_1(B_1) \text{ et } B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1) (*).$$

Posons alors $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1$. f est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si n est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux. f est alors (d'après l'exercice 7) une composée de translations et donc f est une translation. Si n est impair, $n-1$ est pair et donc la composée des $n-1$ premières symétries est une translation. Par suite, f est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après l'exercice 7).

Maintenant, (*) a une solution si et seulement si f a un point invariant.

1er cas. Si n est impair, f étant une symétrie centrale, f a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point B_1 vérifiant $B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1)$ et finalement, un et un seul n -uplet (B_1, \dots, B_n) solution du problème posé.

2ème cas. Si n est pair, f est une translation. Si son vecteur est non nul, f n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul, f est l'identité et tout point est invariant par f .

Déterminons le vecteur de f . On pose $n = 2p$. On a alors

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \dots \circ s_2 \circ s_1 = t_{2A_{2p-1}A_{2p}} \circ \dots \circ t_{2A_1A_2} = t_{2(A_1A_2 + \dots + A_{2p-1}A_{2p})}.$$

Quand $n = 2p$ est pair, le problème posé a des solutions si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Tout d'abord, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ et \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega(1, -2)$ et de rayon 2.

1. Le point $A(2, -2 + \sqrt{3})$ est effectivement sur \mathcal{C} car $(2-1)^2 + (-2 + \sqrt{3} + 2)^2 = 1 + 3 = 4$. La tangente (T) en A à \mathcal{C} est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

$$M(x, y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow (x-2) + \sqrt{3}(y+2 - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

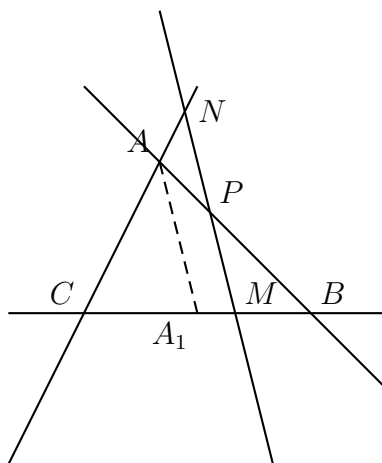
2. Soit \mathcal{C}' le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2. Une équation de ce cercle est $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Par suite,

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4 = 0 & ((1) - (2)) \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Il ya donc deux points d'intersection : $(1 + \sqrt{3}, -1)$ et $(1 - \sqrt{3}, -1)$.

Correction de l'exercice 10 ▲



Montrons tout d'abord que si M, N et P sont alignés, alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ (*).

On suppose donc que M, N et P sont alignés et on note (Δ) la droite contenant M, N et P .

1ère solution. Soit A_1 le projeté de A sur la droite (BC) parallèlement à la droite (Δ) . D'après le théorème de THALES, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \text{ et } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \cdot \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}} = 1.$$

2ème solution. Soit h_1 l'homothétie de centre M et de rapport $k_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de sorte que $h_1(C) = B$. Soit h_2 l'homothétie de centre N et de rapport $k_2 = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, de sorte que $h_2(A) = C$.

Maintenant, le produit $k_1 k_2$ peut-il être égal à 1 ? Si c'était le cas, on aurait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. La réciproque du théorème de THALES permettrait alors d'affirmer que (MN) et (AB) sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc, $k_1 k_2 \neq 1$ et d'après l'exercice 7, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie. Puisque $h_1 \circ h_2$ transforme A en B , son centre est sur la droite (AB) . Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres (MN) . Finalement, le centre de $h_1 \circ h_2$ est le point d'intersection de (MN) et (AB) , c'est-à-dire le point P .

Mais alors, le rapport de $h_1 \circ h_2$ vaut également $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Ainsi, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

3ème solution. On se place dans le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m,1-m)$, $N(0,n)$ et $P(p,0)$ où m, n et p sont distincts de 0 et de 1.

Les coordonnées de \vec{MB} sont $(1-m, m-1)$ et celles de \vec{MC} sont $(-m, m)$. Par suite, $m\vec{MB} = (m-1)\vec{MC}$ et finalement, $\frac{\vec{MB}}{\vec{MC}} = \frac{m-1}{m}$. On trouve de même $\frac{\vec{NC}}{\vec{NA}} = \frac{n-1}{n}$ et $\frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} = \frac{p}{p-1}$. Finalement,

$$\frac{\vec{MB} \vec{NC} \vec{PA}}{\vec{MC} \vec{NA} \vec{PB}} = \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} M, N \text{ et } P \text{ alignés} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1) - (p-m)(m+n-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -pm - pn + p + mn = 0 \Leftrightarrow mn = p(m+n-1) \Leftrightarrow mn \\ &= -p(m-1)(n-1) + pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1) = mn(p-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)} = 1 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\frac{\vec{MB} \vec{NC} \vec{PA}}{\vec{MC} \vec{NA} \vec{PB}} = 1$, alors les points M, N et P sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que (MN) n'est pas parallèle à (AB) . Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait $\frac{\vec{MB} \vec{NC}}{\vec{MC} \vec{NA}} = 1$ et donc $\frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} = 1$, puis $\vec{PA} = \vec{PB}$ et finalement $\vec{AB} = 0$, ce qui n'est pas.

Par suite, la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point P_1 vérifiant d'après le début de l'exercice

$\frac{\vec{MB} \vec{NC} \vec{P_1A}}{\vec{MC} \vec{NA} \vec{P_1B}} = 1$. On en déduit que $\frac{\vec{P_1A}}{\vec{P_1B}} = \frac{\vec{PA}}{\vec{PB}}$. Notons k la valeur commune de ce rapport.

On a déjà que $k \neq 1$, ou encore $1-k \neq 0$. Par suite, $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$, ce qui montre que les points M, N et P sont alignés.

Correction de l'exercice 11 ▲

Notons \mathcal{E} l'ensemble cherché.

Tout d'abord, pour tout réel θ , $1 + \sin(2\theta) \geq 0$, $1 - \sin(2\theta) \geq 0$ puis $\sqrt{1 + \sin(2\theta)} + \sqrt{1 - \sin(2\theta)} > 0$, car $\sin(2\theta)$ ne peut valoir simultanément 1 et -1 . La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est donc définie sur \mathbb{R} , clairement 2π -périodique.

Ainsi,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple. La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox) .

Pour $\theta \in [0, \pi]$, on a clairement $r(\pi - \theta) = r(\theta)$. Par suite,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie orthogonale d'axe (Ox) .

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a clairement $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = r(\theta)$. Par suite, en notant (Δ) la droite d'équation $y = x$,

$$M(\frac{\pi}{2} - \theta) = [r(\frac{\pi}{2} - \theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Δ) puis par symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin par symétrie orthogonale d'axe (Ox) .

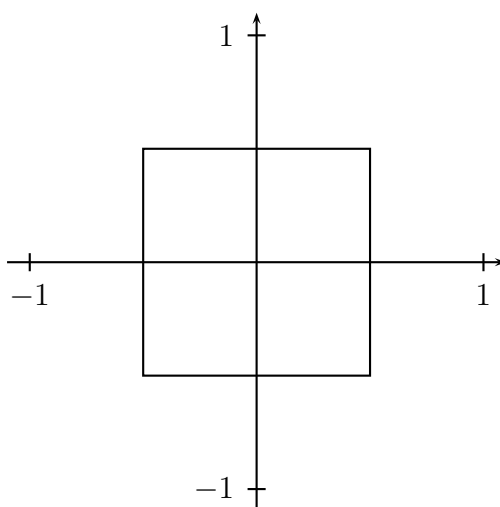
Maintenant, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin(2\theta)} + \sqrt{1 - \sin(2\theta)}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)} + \sqrt{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta)} + \sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)} \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \theta))} = \frac{1}{2\cos\theta}. \end{aligned}$$

En notant x et y les coordonnées d'un point M , on a alors

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



Correction de l'exercice 12 ▲

Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$ et $\sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{AC})}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$.

Par suite, ou bien le triangle (ABC) est rectangle en A (et n'est donc pas équilatéral), ou bien

$\tan(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{AC})}{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}$. Dans ce dernier cas, $\tan(\vec{AB}, \vec{AC})$ est un quotient de deux nombres entières, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas un rationnel.

Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1 + i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1 - i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Le fait que (D) et (D') soient sécantes équivaut à $ab' - a'b \neq 0$.

Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de (D) et (D') .

Si (Δ) est une droite ayant une équation de la forme $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ alors, puisque

$$\lambda(ax_A + by_A + c) + \mu(a'x_A + b'y_A + c') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

le point A appartient à (Δ) .

Réciproquement, soit (Δ) une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Soit \vec{v} le vecteur de coordonnées (α, β) . Puisque $ab' - a'b \neq 0$, les deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{u}'(a', b')$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille (\vec{u}, \vec{u}') est une base du plan (vectoriel). Par suite, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ (car $\vec{v} \neq \vec{0}$) tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}'$, ou encore tel que $\alpha = \lambda a + \mu a'$ et $\beta = \lambda b + \mu b'$. Toute droite (Δ) admet donc une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax + by) + \mu(a'x + b'y) + \gamma = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Maintenant, si $A \in (\Delta)$, alors

$$\gamma = -\lambda(ax_A + by_A) + \mu(a'x_A + b'y_A) = -\lambda(-c) - \mu(-c') = \lambda c + \mu c'.$$

Finalement, si $A \in (\Delta)$, (Δ) admet une équation de la forme $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

2. Les deux droites (D) et (D') considérées sont bien sécantes car $5 \cdot 2 - 7(-3) = 31 \neq 0$. Notons A leur point d'intersection et B le point de coordonnées $(1, 0)$. B n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée (Δ) , solution du problème posé.

Puisque (Δ) passe par A , (Δ) a une équation de la forme $\lambda(5x + 7y + 1) + \mu(-3x + 2y + 1) = 0$. Il est clair que l'on ne peut avoir $\lambda = 0$ (car (Δ) n'est pas (D')) et après division par λ , l'équation s'écrit sous la forme $(5x + 7y + 1) + k(-3x + 2y + 1) = 0$ où k est un réel. Maintenant, (Δ) passe par B si et seulement si $6 - 2k = 0$ ou encore $k = 3$.

Une équation cartésienne de (Δ) est donc $(5x + 7y + 1) + 3(-3x + 2y + 1) = 0$ ou encore $-4x + 13y + 4 = 0$.

3. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R}, M \in (D_m) &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, (2m - 1)x + (m + 1)y - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, m(2x + y - 4) - x + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 2 \end{aligned}$$

Toutes les droites (D_m) passent par le point $A(1, 2)$.

La droite (D_{-1}) passe par A et est parallèle à (Oy) . Ensuite, pour $m \neq -1$, (D_m) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f(m) = \frac{-2m+1}{m+1} = -2 + \frac{3}{m+1}$. Quand m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(m)$ prend toutes les valeurs réelles sauf -2 .

La droite passant par A de coefficient directeur -2 (et donc d'équation $y = -2x + 4$) n'est pas une droite (D_m) . Toute autre droite passant par A est une droite (D_m) .
