Espaces vectoriels de dimension finie (ou non)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$ et $e_5 = (2,3,0,1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4,e_5)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F+G$?

Correction ▼ [005183]

Exercice 2 **IT

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Correction ▼ [005184]

Exercice 3 **

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \text{Ker} f + \text{Ker} g = \text{Im} f + \text{Im} g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Correction ▼ [005185]

Exercice 4 ***I

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Correction ▼ [005186]

Exercice 5 **T

Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$.

Correction ▼ [005187]

Exercice 6 **

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction ▼ [005188]

Exercice 7 **

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x,y)) = (x',y')$.

1. Rappeler l'écriture générale de (x',y') en fonction de (x,y).

2. Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C},\ z' = az + b\bar{z}$.
3. Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ est $z' = az + b\bar{z}$).

Correction ▼ [005189]

Exercice 8 **I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\mathrm{rg}u - \mathrm{rg}v| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v$.

Correction ▼ [005190]

Exercice 9 ****

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, on a :
$$(\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathscr{L}(E) / f \circ g + g \circ f = Id_E).$$
2. On suppose $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$ de E telle que :
$$\forall i \in \{1, \dots, p\},\ f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction ▼ [005191]

Exercice 10 ***I Le théorème des noyaux itérés

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \mathrm{Ker}f^k$ et $I_k = \mathrm{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.
   (b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N},\ (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geqslant p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
   (c) Montrer que $p \leqslant n$.
3. Montrer que si $k < p$, $I_k = I_{k+1}$ et si $k \geqslant p$, $I_k = I_{k+1}$.
4. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p.
5. Soit $d_k = \mathrm{dim}I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

Correction ▼ [005192]

Exercice 11 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est 0).

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x,\ u(x), \dots,\ u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.
3. On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n. Déterminer $\mathrm{rg}u$.

Correction ▼ [005193]

Exercice 12 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

Correction ▼ [005194]

Correction de l'exercice 1 ▲

• e_4 et e_5 ne sont clairement pas colinéaires. Donc (e_4, e_5) est une famille libre et $\dim G = \text{rg}\,(e_4, e_5) = 2$. Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leqslant \dim F \leqslant 3$. Soit alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu + 2\nu = 0 \quad (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 \quad (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 \quad (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 \quad (4) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0\,((3)-(2)) \\ \nu - \lambda = 0\,((1)-(2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0\,(1) \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que : $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$. (e_1, e_2, e_3) est donc libre et $\dim F = \text{rg}\,(e_1, e_2, e_3) = 3$. • Comme $F \subset F + G$, $\dim\,(F+G) \geqslant 3$ ou encore $\dim\,(F+G) = 3$ ou 4. De plus :

$$\dim\,(F+G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ ce qui fournit le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu + 2\nu = -1 \quad (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 \quad (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 \quad (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 \quad (4) \end{array} \right. .$$

$(3)-(2)$ fournit $\lambda = -1$ puis $(1)-(2)$ fournit $\nu = -2$ puis (2) fournit $\mu = 4$. Maintenant, (4) n'est pas vérifiée car $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution et donc $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Par suite, $\dim\,(F+G) = 4$. Enfin,

$$\dim\,(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F+G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

$$\boxed{\dim(F) = 3,\ \dim(G) = 2,\ \dim(F+G) = 4 \text{ et } \dim(F \cap G) = 1.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $H_1 \subset H_1 + H_2$ et donc $\dim\,(H_1 + H_2) \geqslant n - 1$ ou encore $\dim\,(H_1 + H_2) \in \{n-1, n\}$. Donc

$$\dim\,(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim\,(H_1 + H_2) = \left\{ \begin{array}{l} (n-1) + (n-1) - (n-1) = n-1 \\ \quad \text{ou} \\ (n-1) + (n-1) - n = n-2 \end{array} \right. .$$

Maintenant, si $\dim\,(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$. Réciproquement, si $H_1 = H_2$ alors $H_1 + H_2 = H_1$ et $\dim\,(H_1 + H_2) = n - 1$. En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim\,(H_1 \cap H_2) = n - 2$ et bien sûr, si $H_1 = H_2$, alors $\dim\,(H_1 \cap H_2) = n - 1$. Si $n = 2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul. Si $n = 3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Correction de l'exercice 3 ▲

On a

$$n = \dim E = \dim\,(\text{Ker}\, f + \text{Ker}\, g) = \dim\,(\text{Ker}\, f) + \dim\,(\text{Ker}\, g) - \dim\,(\text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g),$$

mais aussi,

$$n = \dim\,(\text{Im}\, f) + \dim\,(\text{Im}\, g) - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g) = 2n - \dim \text{Ker}\, f - \dim\,(\text{Ker}\, g) - \dim\,(\text{Im}\, f \cap \text{Im}\, g).$$

Par suite,

$$n+\dim\,(\text{Ker } f\cap\text{Ker } g)=\dim\,(\text{Ker } f)+\dim\text{ Ker } g=n-\dim\,(\text{Im } f\cap\text{Im } g)$$

puis $n+\dim\,(\text{Ker } f\cap\text{Ker } g)=n-\dim\,(\text{Im } f\cap\text{Im } g)\Rightarrow\dim\,(\text{Ker } f\cap\text{Ker } g)+\dim\,(\text{Im } f\cap\text{Im } g)=0$ ou encore $\dim\,(\text{Ker } f\cap\text{Ker } g)=\dim\,(\text{Im } f\cap\text{Im } g)=0$, et finalement, $\text{Ker } f\cap\text{Ker } g=\text{Im } f\cap\text{Im } g=\{0\}$. Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1)-P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P,Q)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q)&=(\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)=\lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))\\&=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

   φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $P\in E$. $P\in\text{Ker }\varphi\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ P(x+1)=P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q=P-P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0)=P(1)=P(2)=\ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\text{Ker }\varphi$ et donc

$$\text{Ker }\varphi=\{\text{polynômes constants}\}=\mathbb{R}_0[X].$$

   Pour déterminer $\text{Im }\varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P)=P(X+1)-P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P=a_nX^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P)&=a_n((X+1)^n-X^n)+\text{termes de degré inférieur on égal à } n-1\\&=a_n(X^n-X^n)+\text{termes de degré inférieur on égal à } n-1\\&=\text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

   Donc, $\text{Im }(\varphi)\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim\text{ Im }(\varphi)=\dim\mathbb{R}_n[X]-\dim\text{ Ker }(\varphi)=(n+1)-1=n=\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]<+\infty,$$

   et donc $\text{Im }\varphi=\mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1)-P(X)=Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $u=(x,y,z,t)=xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in\mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u)&=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)=x(2e_1+e_3)+y(-e_2+e_4)+z(e_1+2e_3)+t(e_2-e_4)\\&=(2x+z)e_1+(-y+t)e_2+(x+2z)e_3+(y-t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u\in\text{Ker } f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+z=0\\-y+t=0\\x+2z=0\\y-t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=z=0\\y=t\end{array}\right..$$

Donc, $\text{Ker } f=\{(0,y,0,y),\ y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((0,1,0,1))$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((0,1,0,1)).}$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x', y', z', t') \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$). Donc, $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)$.

$$\boxed{\text{Im } f == \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).}$$

Autre solution pour la détermination de Im f. $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$. Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim\ (\text{Im } f) = 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de Im f.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda (z + a\bar{z}) + \mu (z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha + \pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, Im f est une droite vectorielle et pour déterminer Im f, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im } (z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{array} \right. .$$

2. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = (\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \gamma \frac{z - \bar{z}}{2i}) + i(\beta \frac{z + \bar{z}}{2} + \delta \frac{z - \bar{z}}{2i}) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\beta - \gamma}{2} \right) z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

où $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$.

3. Réciproquement, si $z' = az + b\bar{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{array} \right. .$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Par définition, rg $(u+v) = \dim\ (\text{Im}\ (u+v))$.

$$\text{Im}\ (u+v) = \{u(x) + v(x),\ x \in E\} \subset \{u(x) + v(y),\ (x,y) \in E^2\} = \text{Im}\ u + \text{Im}\ v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim\ (\text{Im}\ (u+v)) \\ &\leqslant \dim\ (\text{Im}\ u + \text{Im}\ v) = \dim\ (\text{Im}\ u) + \dim\ (\text{Im}\ v) - \dim\ (\text{Im}\ u \cap\ \text{Im} v) \\ &\leqslant \dim\ (\text{Im}\ u) + \dim\ (\text{Im}\ v) = \text{rg}\ u + \text{rg}\ v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ \text{rg}\ (u+v) \leqslant \text{rg}\ u + \text{rg}\ v.}$$

Ensuite,

$$\text{rg}\ u = \text{rg}\ (u+v-v) \leqslant \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ (-v) = \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ v,$$

(il est clair que Im $(-v) = $ Im v) et donc rg $u - $ rg $v \leqslant$ rg $(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi rg $v - $ rg $u = $ rg $(u+v)$ et finalement

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ |\text{rg}\ u - \text{rg}\ v| \leqslant \text{rg}\ (u+v).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. • **(1)⇒(2).** Si Ker $f = $ Im f, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans Im $f = $ Ker f et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim\ (\text{Ker}\ f) + \text{rg}\ f = 2\ \text{rg}\ f$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que rg $f = \frac{n}{2}$. • **(2)⇒(3).** Si $f^2 = 0$ et $n = 2\ \text{rg}\ f\ (\in 2\mathbb{N})$, cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$. Posons $r = $ rg f et donc $n = 2r$, puis $F = $ Ker $f = $ Im f ($\dim F = r$).
   Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = r$). Soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i \in \text{Ker}\ f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ \lambda_i = 0,$$

   car la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre. $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre de $F = $ Im f de cardinal r et donc une base de $F = $ Ker $f = $ Im f. Au passage, puisque $E = F \oplus G$, $(e_1, \ldots, e_r, e'_1, \ldots, e'_r)$ est une base de E. Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g

est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1,r]\!]$, on a alors :

$$(f\circ g+g\circ f)(e_i)=f(e'_i)+g(0)=e_i+0=e_i,$$

et

$$(f\circ g+g\circ f)(e'_i)=f(e_i)+g(e_i)=0+e'_i=e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes $f\circ g+g\circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E et donc $f\circ g+g\circ f=Id_E$.
• **(3)⇒(1).** Supposons que $f^2=0$ et qu'il existe $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f\circ g+g\circ f=Id_E$. Comme $f^2=0$, on a déjà $\text{Im } f\subset\text{Ker } f$. D'autre part, si x est un élément de $\text{Ker } f$, alors $x=f(g(x))+g(f(x))=f(g(x))\in\text{Im } f$ et on a aussi $\text{Ker } f\subset\text{Im } f$. Finalement, $\text{Ker } f=\text{Im } f$.

2. L'existence d'une base $(e_1,...,e_p,e'_1,...,e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p=r=\text{rg } f$).

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soient k un entier naturel et x un élément de E.

$$x\in N_k\Rightarrow f^k(x)=0\Rightarrow f(f^k(x))=f(0)=0\Rightarrow f^{k+1}(x)=0\Rightarrow x\in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k\in\mathbb{N},\ N_k\subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x\in I_{k+1}\Rightarrow\exists y\in E/\ x=f^{k+1}(y)\Rightarrow\exists z(=f(y))\in E/\ x=f^k(z)\Rightarrow x\in I_k.$$

On a montré que : $\forall k\in\mathbb{N},\ I_{k+1}\subset I_k$.

2. (a) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k=N_{k+1}$.
On a déjà $N_{k+1}\subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2}\subset N_{k+1}$.
Soit x un élément de E.

$$\begin{aligned}x\in N_{k+2}&\Rightarrow f^{k+2}(x)=0\Rightarrow f^{k+1}(f(x))=0\Rightarrow f(x)\in N_{k+1}=N_k\Rightarrow f^k(f(x))=0\\&\Rightarrow f^{k+1}(x)=0\Rightarrow x\in N_{k+1}.\end{aligned}$$

(b) On a $\{0\}=N_0\subset N_1\subset N_2...$ Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors, $0=\dim N_0<\dim N_1<\dim N_2...$ Donc $\dim N_1\geqslant 1$, $\dim N_2\geqslant 2$ et par une récurrence facile, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dim N_k\geqslant k$. En particulier, $\dim N_{n+1}\geqslant n+1>n=\dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k=N_{k+1}$.
Soit p le plus petit de ces entiers k (l'existence de p est démontrée proprement de la façon suivante : si $K=\in\{k\in\mathbb{N}/\ N_k=N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément). On note que puisque f est non injectif, $\{0\}=N_0\underset{\neq}{\subset}N_1$ et donc $p\in\mathbb{N}^*$. Par définition de p, pour $k<p$, $N_k\underset{\neq}{\subset}N_{k+1}$ et, d'après le a) et puisque $N_p=N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k=p$, on a $N_k=N_p$.

(c) $0<\dim N_1<...<\dim N_p$ montre que pour $k\leqslant p$, on a $\dim N_k=k$ et en particulier $p\leqslant\dim N_p=n$.

3. Puisque $N_k\subset N_{k+1}$, $I_{k+1}\subset I_k$ et que $\dim E<+\infty$, on a :

$$N_k=N_{k+1}\Leftrightarrow\dim N_k=\dim N_{k+1}\Leftrightarrow n-\text{rg }(f^k)=n-\text{rg }(f^{k+1})\Leftrightarrow\dim\,(I_k)=\dim\,(I_{k+1})\Leftrightarrow I_k=I_{k+1}.$$

Donc, pour $k<p$, $I_k\underset{neq}{\subset}I_{k+1}$ et pour $k=p$, $I_k=I_{k+1}$.

4. Soit $x \in I_p \cap N_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ et $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y) = 0$ et $y \in N_{2p} = N_p$ (puisque $2p \geqslant p$) et donc $x = f^p(y) = 0$. On a montré que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Maintenant, le théorème du rang montre que $E = \dim\ (I_p) + \dim\ (N_p)$ et donc $E = I_p \oplus N_p$.
Posons $f_{/I_p} = f'$. f' est déjà un endomorphisme de I_p car $f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p$.
Soit alors $x \in I_p$. $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$.
$$x \in \text{Ker } f' \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(y)) = 0 \Rightarrow y \in N_{p+1} = N_p x = f_p(y) = 0.$$
Donc Ker $f' = \{0\}$ et donc, puisque $\dim I_p < +\infty$, $f' \in \mathscr{GL}(I_p)$.
5. Soient k un entier naturel et g_k la restriction de f à I_k.
D'après le théorème du rang, $d_k = \dim\ (I_k) = \dim\ (\text{Ker } g_k) + \dim\ (\text{Im } g_k)$. Maintenant, Im $g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim\ (\text{Im } g_k) = d_{k+1}$. D'autre part, Ker g_k = Ker $f_{/I_k}$ = Ker $f \cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \dim\ (\text{Ker } f \cap I_k)$. Puisque la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim\ (\text{Ker } f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $p (\in \mathbb{N}^*)$ l'indice de nilpotence de u.
Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \text{Min } \{k \in \{0, ..., p-1\}/\ \lambda_k \neq 0\}$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i}(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x)) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geqslant i+1,\ p-1-i+k \geqslant p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0)\end{aligned}$$
ce qui contredit la définition de i.
Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leqslant n$. Par suite, $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$.
3. On applique l'exerice 10.
Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n$. Par suite (d'après l'exercice 12, 2), c)), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc
$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \ldots < \dim N_n = n.$$
Pour $k \in \{0, ..., n\}$, notons d_k est la dimension de N_k. Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a $d_{k+1} \geqslant d_k$ et une récurrence facile montre que, pour $k \in \{0, ..., n\}$, on a $d_k \geqslant k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $\{1, ..., n-1\}$, on a $d_i = \dim N_i > i$, alors, par une récurrence facile, pour $i \leqslant k \leqslant n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,
$$\forall k \in \{0, ..., n\},\ \dim\ (N_k) = k,$$
ou encore, d'après le théorème du rang,
$\forall k \in \{0, ..., n\}$, rg $(u^k) = n-k$, et en particulier rg $(u) = n-1$.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $x \in E$.

$$x \in \text{Ker }(f-2Id) \cap \text{Ker }(f-3Id) \Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x-2x = f(x)-f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\text{Ker }(f-2Id) \cap \text{Ker }(f-3Id) = \{0\}$ (même si $f^2-5f+6Id \neq 0$).
Soit $x \in E$. On cherche y et z tels que $y \in \text{Ker }(f-2Id)$, $z \in \text{Ker }(f-3Id)$ et $x = y+z$.
Si y et z existent, y et z sont solution du système $\left\{\begin{array}{l} y+z=x \\ 2y+3z=f(x) \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} y=3x-f(x) \\ z=f(x)-2x \end{array}\right.$.
Réciproquement . Soient $x \in E$ puis $y = 3x-f(x)$ et $z = f(x)-2x$.
On a bien $y+z = x$ puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x)-f^2(x) = 3f(x)-(5f(x)-6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f-6Id) \\ &= 6x-2f(x) = 2(3x-f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et $y \in \text{Ker }(f-2Id)$. De même,

$$f(z) = f^2(x)-2f(x) = (5f(x)-6x)-2f(x) = 3(f(x)-2x) = 3z,$$

et $z \in \text{Ker }(f-3Id)$. On a montré que $E = \text{Ker }(f-2Id)+\text{Ker }(f-3d)$, et finalement que

$$E = \text{Ker }(f-2Id) \oplus \text{Ker }(f-3d).$$