



Espaces vectoriels de dimension finie (ou non)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 1, 1, 3)$, $e_3 = (2, 1, 1, 1)$, $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $e_5 = (2, 3, 0, 1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$. Quelles sont les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$?

[Correction ▼](#)

[005183]

Exercice 2 **IT

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E . Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

[Correction ▼](#)

[005184]

Exercice 3 **

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \text{Ker}f + \text{Ker}g = \text{Im}f + \text{Im}g$. Montrer que ces sommes sont directes.

[Correction ▼](#)

[005185]

Exercice 4 ***I

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

[Correction ▼](#)

[005186]

Exercice 5 **T

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$.

[Correction ▼](#)

[005187]

Exercice 6 **

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où a est un nombre complexe donné non nul. Montrer que f est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . f est-il un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} ? Déterminer le noyau et l'image de f .

[Correction ▼](#)

[005188]

Exercice 7 **

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x, y)) = (x', y')$.

1. Rappeler l'écriture générale de (x', y') en fonction de (x, y) .
2. Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C}, z' = az + b\bar{z}$.
3. Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de \mathbb{R}^2 est $z' = az + b\bar{z}$).

Correction ▼

[005189]

Exercice 8 **I

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies sur \mathbb{K} et u et v deux applications linéaires de E dans F . Montrer que : $|\operatorname{rg}u - \operatorname{rg}v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}u + \operatorname{rg}v$.

Correction ▼

[005190]

Exercice 9 ****

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Montrer que, pour tout endomorphisme f de \mathbb{R}^2 , on a :

$$(\operatorname{Ker}f = \operatorname{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g + g \circ f = \operatorname{Id}_E).$$

2. On suppose $\operatorname{Ker}f = \operatorname{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$ de E telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction ▼

[005191]

Exercice 10 ***I Le théorème des noyaux itérés

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \operatorname{Ker}f^k$ et $I_k = \operatorname{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = \operatorname{Id}_E$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}))$.
(b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
(c) Montrer que $p \leq n$.
3. Montrer que si $k < p, I_k = I_{k+1}$ et si $k \geq p, I_k = I_{k+1}$.
4. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p .
5. Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

Correction ▼

[005192]

Exercice 11 ***I

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie notée n . Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u , nilpotent d'indice 1 est 0).

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p . Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

3. On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n . Déterminer $\operatorname{rg} u$.

[Correction ▼](#)

[005193]

Exercice 12 ***I

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque sur \mathbb{K} et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - 2Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id)$.

[Correction ▼](#)

[005194]

Correction de l'exercice 1 ▲

• e_4 et e_5 ne sont clairement pas colinéaires. Donc (e_4, e_5) est une famille libre et $\dim G = \text{rg}(e_4, e_5) = 2$. Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leq \dim F \leq 3$. Soit alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & ((3) - (2)) \\ \nu - \lambda = 0 & ((1) - (2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que : $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$. (e_1, e_2, e_3) est donc libre et $\dim F = \text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$. • Comme $F \subset F + G$, $\dim(F + G) \geq 3$ ou encore $\dim(F + G) = 3$ ou 4 . De plus :

$$\dim(F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 & (4) \end{cases}.$$

(3) - (2) fournit $\lambda = -1$ puis (1) - (2) fournit $\nu = -2$ puis (2) fournit $\mu = 4$. Maintenant, (4) n'est pas vérifiée car $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution et donc $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Par suite, $\dim(F + G) = 4$. Enfin,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

$$\dim(F) = 3, \dim(G) = 2, \dim(F + G) = 4 \text{ et } \dim(F \cap G) = 1.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $H_1 \subset H_1 + H_2$ et donc $\dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$ ou encore $\dim(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$. Donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n - 1) + (n - 1) - (n - 1) = n - 1 \\ \text{ou} \\ (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Maintenant, si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$. Réciproquement, si $H_1 = H_2$ alors $H_1 + H_2 = H_1$ et $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$. En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ et bien sûr, si $H_1 = H_2$, alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$. Si $n = 2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul. Si $n = 3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Correction de l'exercice 3 ▲

On a

$$n = \dim E = \dim(\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 2n - \dim \text{Ker } f - \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim \text{Ker } g = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

puis $n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \Rightarrow \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ ou encore $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$, et finalement, $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$. Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q). \end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E .

2. Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$ (car $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\text{Ker } \varphi$ et donc

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer $\text{Im } \varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Im } (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $u = (x, y, z, t) = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + t f(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4. \end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=0 \\ -y+t=0 \\ x+2z=0 \\ y-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=0 \\ y=t \end{cases}.$$

Donc, $\text{Ker } f = \{(0, y, 0, y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0, 1))$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, 0, 1))}.$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x', y', z', t') \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x+z=x' \\ -y+t=y' \\ x+2z=z' \\ y-t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t , n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = (\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y')$). Donc, $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y+t=0\} = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)$.

$$\boxed{\text{Im } f = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)}.$$

Autre solution pour la détermination de $\text{Im } f$. $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$. Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\text{Im } f$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a \overline{(\lambda z + \mu z')} = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc \mathbb{R} -linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas \mathbb{C} -linéaire. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ , $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\text{Im } f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\text{Im } f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1, \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{cases}.$$

2. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = \left(\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} + \gamma \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\beta \frac{z+\bar{z}}{2} + \delta \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

où $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$.

3. Réciproquement, si $z' = az + b\bar{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{cases} .$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Par définition, $\text{rg}(u+v) = \dim(\text{Im}(u+v))$.

$$\text{Im}(u+v) = \{u(x) + v(x), x \in E\} \subset \{u(x) + v(y), (x, y) \in E^2\} = \text{Im } u + \text{Im } v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{rg}(u+v) &= \dim(\text{Im}(u+v)) \\ &\leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) - \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) \\ &\leq \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) = \text{rg } u + \text{rg } v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{rg}(u+v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$

Ensuite,

$$\text{rg } u = \text{rg}(u+v-v) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(-v) = \text{rg}(u+v) + \text{rg } v,$$

(il est clair que $\text{Im}(-v) = \text{Im } v$) et donc $\text{rg } u - \text{rg } v \leq \text{rg}(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v , on a aussi $\text{rg } v - \text{rg } u = \text{rg}(u+v)$ et finalement

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, |\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg}(u+v).$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. • **(1)⇒(2)**. Si $\text{Ker } f = \text{Im } f$, alors pour tout élément x de E , $f(x)$ est dans $\text{Im } f = \text{Ker } f$ et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = 2 \text{rg } f$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que $\text{rg } f = \frac{n}{2}$. • **(2)⇒(3)**. Si $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg } f (\in 2\mathbb{N})$, cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Posons $r = \text{rg } f$ et donc $n = 2r$, puis $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$ ($\dim F = r$).

Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = r$). Soit (e'_1, \dots, e'_r) une base de G . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille (e_1, \dots, e_r) est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i e'_i \in \text{Ker } f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_i = 0,$$

car la famille $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre. (e_1, \dots, e_r) est une famille libre de $F = \text{Im } f$ de cardinal r et donc une base de $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$. Au passage, puisque $E = F \oplus G$, $(e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_r)$ est une base de E . Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E et donc $f \circ g + g \circ f = Id_E$.

• **(3) \Rightarrow (1).** Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. D'autre part, si x est un élément de $\text{Ker } f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im } f$ et on a aussi $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$. Finalement, $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

2. L'existence d'une base $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p = r = \text{rg } f$).

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soient k un entier naturel et x un élément de E .

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^{k-1}(x)) = 0 \Rightarrow f^{k-1}(x) \in N_1 = \{0\} \Rightarrow f^{k-1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E / x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E / x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset I_k$.

2. (a) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$.

On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.

Soit x un élément de E .

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

- (b) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \dots$. Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors, $0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots$. Donc $\dim N_1 \geq 1$, $\dim N_2 \geq 2$ et par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N}, \dim N_k \geq k$. En particulier, $\dim N_{n+1} \geq n+1 > n = \dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.

Soit p le plus petit de ces entiers k (l'existence de p est démontrée proprement de la façon suivante : si $K = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de \mathbb{N} et admet donc un plus petit élément).

On note que puisque f est non injectif, $\{0\} = N_0 \subset N_1$ et donc $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p , pour $k < p$, $N_k \subset N_{k+1}$ et, d'après le a) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k = p$, on a $N_k = N_p$.

(c) $0 < \dim N_1 < \dots < \dim N_p$ montre que pour $k \leq p$, on a $\dim N_k = k$ et en particulier $p \leq \dim N_p = n$.

3. Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim E < +\infty$, on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \operatorname{rg}(f^k) = n - \operatorname{rg}(f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \subsetneq I_{k+1}$ et pour $k = p$, $I_k = I_{k+1}$.

4. Soit $x \in I_p \cap N_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ et $\exists y \in E / x = f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y) = 0$ et $y \in N_{2p} = N_p$ (puisque $2p \geq p$) et donc $x = f^p(y) = 0$. On a montré que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Maintenant, le théorème du rang montre que $E = \dim(I_p) + \dim(N_p)$ et donc $E = I_p \oplus N_p$.

Posons $f|_{I_p} = f'$. f' est déjà un endomorphisme de I_p car $f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p$.

Soit alors $x \in I_p$. $\exists y \in E / x = f^p(y)$.

$$x \in \operatorname{Ker} f' \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(y)) = 0 \Rightarrow y \in N_{p+1} = N_p \Rightarrow x = f_p(y) = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} f' = \{0\}$ et donc, puisque $\dim I_p < +\infty$, $f' \in \mathcal{GL}(I_p)$.

5. Soient k un entier naturel et g_k la restriction de f à I_k .

D'après le théorème du rang, $d_k = \dim(I_k) = \dim(\operatorname{Ker} g_k) + \dim(\operatorname{Im} g_k)$. Maintenant, $\operatorname{Im} g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim(\operatorname{Im} g_k) = d_{k+1}$. D'autre part, $\operatorname{Ker} g_k = \operatorname{Ker} f|_{I_k} = \operatorname{Ker} f \cap I_k$.

Ainsi, pour tout entier naturel k , $d_k - d_{k+1} = \dim(\operatorname{Ker} f \cap I_k)$. Puisque la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim(\operatorname{Ker} f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u .

Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.

Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \operatorname{Min} \{k \in \{0, \dots, p-1\} / \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i} \left(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, p-1-i+k \geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i .

Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leq n$. Par suite, $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$.

3. On applique l'exercice 10.

Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \subsetneq N_n$. Par suite (d'après l'exercice 12, 2), c), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc

$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots < \dim N_n = n.$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, notons d_k est la dimension de N_k . Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $d_{k+1} \geq d_k$ et une récurrence facile montre que, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $d_k \geq k$.

Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $\{1, \dots, n-1\}$, on a $d_i = \dim N_i > i$, alors, par une récurrence facile, pour $i \leq k \leq n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \dim(N_k) = k,$$

ou encore, d'après le théorème du rang,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \operatorname{rg}(u^k) = n - k, \text{ et en particulier } \operatorname{rg}(u) = n - 1.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $x \in E$.

$$x \in \operatorname{Ker}(f - 2Id) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id) \Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\operatorname{Ker}(f - 2Id) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id) = \{0\}$ (même si $f^2 - 5f + 6Id \neq 0$).

Soit $x \in E$. On cherche y et z tels que $y \in \operatorname{Ker}(f - 2Id)$, $z \in \operatorname{Ker}(f - 3Id)$ et $x = y + z$.

Si y et z existent, y et z sont solution du système $\begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$ et donc $\begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$.

Réciproquement. Soient $x \in E$ puis $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.

On a bien $y + z = x$ puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6Id) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et $y \in \operatorname{Ker}(f - 2Id)$. De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et $z \in \operatorname{Ker}(f - 3Id)$. On a montré que $E = \operatorname{Ker}(f - 2Id) + \operatorname{Ker}(f - 3d)$, et finalement que

$$E = \operatorname{Ker}(f - 2Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3d).$$