



## Le binôme. Les symboles $\Sigma$ et $\prod$

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 IT Identités combinatoires

La difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable.

1. Calculer  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ .
2. Montrer que  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$  et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Calculer les sommes  $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$  et  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$
4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .
5. Montrer que  $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$  (utiliser le polynôme  $(1+x)^{2n}$ ).
6. Calculer les sommes  $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$  et  $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$  (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
7. Montrer que  $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$  où  $0 \leq p \leq n$ . Interprétation dans le triangle de PASCAL ?
8. (a) Soit  $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ . Trouver une relation de récurrence liant  $I_n$  et  $I_{n+1}$  et en déduire  $I_n$  en fonction de  $n$  (faire une intégration par parties dans  $I_n - I_{n+1}$ ).  
(b) Démontrer l'identité valable pour  $n \geq 1$  :  $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$ .

Correction ▼

[005137]

### Exercice 2 \*\*

Quel est le coefficient de  $a^4 b^2 c^3$  dans le développement de  $(a-b+2c)^9$ .

Correction ▼

[005138]

### Exercice 3 \*\*I

Développer  $(a+b+c+d)^2$  et  $(a+b+c)^3$ .

Correction ▼

[005139]

### Exercice 4 \*\*\*

Soit  $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Quel est le plus grand terme du développement de  $(a+b)^n$  ?

Correction ▼

[005140]

### Exercice 5 \*

Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  l'équation  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$ .

Correction ▼

[005141]

### Exercice 6 IT

Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

1. (\*) Calculer  $\sum_{i=3}^n i$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ ,  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ .
2. (\*) Calculer le nombre  $1, 1111\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1, \underbrace{11\dots 1}_n$  et le nombre  $0, 9999\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0, \underbrace{99\dots 9}_n$ .
3. (\*) Calculer  $\underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. (\*) Calculer  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ .
5. (\*\*\*) Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
6. (\*\*\*) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .
7. (\*\*\*) Pour  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
8. (\*\*\*) On pose  $u_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n - 3$ .
  - (a) Calculer la suite  $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - (b) Calculer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

Correction ▼

[005142]

### Exercice 7 Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes :

1. (\*\*\*)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  et  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (\*\*\*) Calculer  $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  (dans chaque cas, chercher un polynôme  $P_p$  de degré  $p + 1$  tel que  $P_p(x + 1) - P_p(x) = x^p$ ).
3. (\*\*\*) Calculer  $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$  (aller relire certaines formules établies dans une planche précédente).
4. (\*\*\*) Calculer  $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$ .

Correction ▼

[005143]

### Exercice 8 I

Calculer les sommes suivantes :

1. (\*\*\*)  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$ .
2. (\*\*\*)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$  et  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$ .
3. (\*)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ .
4. (\*\*\*) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (utiliser les résultats de l'exercice 7, 2)).

Correction ▼

[005144]

### Exercice 9 I

1. (\*) Calculer  $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. (\*\*\*) Calculer  $\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}$ ,  $a \in ]0, \pi[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Correction ▼

[005145]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Posons  $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$  et  $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$ . Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geq 1),$$

et donc  $S_1 = S_2$ . Puis  $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ , et donc  $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

3. En posant  $j = e^{2i\pi/3}$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,

- si  $k \in 3\mathbb{N}$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $k = 3p$  et  $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$  car  $j^3 = 1$ .
- si  $k \in 3\mathbb{N} + 1$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $k = 3p + 1$  et  $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si  $k \in 3\mathbb{N} + 2$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $k = 3p + 2$  et  $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$ .

Finalement,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3} (2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3} (2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}) \end{aligned}$$

4. Pour  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

5.  $\binom{2n}{n}$  est le coefficient de  $x^n$  dans le développement de  $(1+x)^{2n}$ . Mais d'autre part,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de  $x^n$  vaut  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$  ou encore  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ . Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

6. **1ère solution.** Pour  $x$  réel, posons  $P(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ .

Pour  $x$  réel,

$$P(x) = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour  $x = 1$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

**2ème solution.** D'après 4),

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

**1ère solution.** Pour  $x$  réel, posons  $P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ . On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour  $x$  réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t) dt = \int_0^1 (1+t)^n dt = \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour  $x = 1$ , on obtient

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

**2ème solution.** D'après 4),  $(n+1) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n+1}{k+1}$  et donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} ((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

7. Pour  $1 \leq k \leq n-p$ ,  $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$  (ce qui reste vrai pour  $k = p$  en tenant compte de  $\binom{p}{p+1} = 0$ ). Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p} \left( \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1} \binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p} \binom{p+k}{p+1} \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de PASCAL. Quand on descend dans le triangle de PASCAL, le long de la colonne  $p$ , du coefficient  $\binom{p}{p}$  (ligne  $p$ ) au coefficient  $\binom{p}{n}$  (ligne  $n$ ), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve  $\binom{n+1}{p+1}$  qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8. (a) Pour  $n$  naturel donné, posons  $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ . Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1}) dx = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 x \cdot x (1-x^2)^{n+1} dx \\ &= \left[ -x \frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1} \end{aligned}$$

et donc  $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$  ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

On a déjà  $I_0 = 1$ . Puis, pour  $n \geq 1$ ,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2}{3} I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}.$$

(b) Pour  $n$  naturel non nul donné :

$$\begin{aligned} 1 - \binom{n}{1} \frac{1}{3} + \binom{n}{2} \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} &= \int_0^1 (1 - \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{2n}) dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \dots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \dots + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \dots + \binom{6}{4} a^4 b^2 - \dots + b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6} \binom{6}{4} 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^3 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 10080.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 6abc.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Le terme général du développement de  $(a+b)^n$  est  $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}}{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si  $\frac{na-b}{a+b} > n-1$  (ce qui équivaut à  $n < \frac{a}{b}$ ), alors la suite  $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$  est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier :  $a^n$ .

2ème cas. Si  $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$  (ce qui équivaut à  $n \leq \frac{b}{a}$ ), alors la suite  $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$  est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier :  $b^n$ .

3ème cas. Si  $0 < \frac{na-b}{a+b} \leq n-1$ . Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que  $\frac{na-b}{a+b}$  soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite  $u$  est unimodale).

Si  $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$ , on pose  $k = E(\frac{na-b}{a+b}) + 1$ , la suite  $u$  croît strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice  $k$ , atteint une et une seule fois.

Si  $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$ , le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice  $k$  et à l'indice  $k+1$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Pour  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} &= 5n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \\ &\Leftrightarrow n(-24 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit  $n \geq 3$ .

$$\sum_{i=3}^n i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $u_n = 1, \underbrace{11\dots 1}_n$ . On a

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = 1 + \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^n}.$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{9 \cdot 10^n}$  tend vers 0, et donc,  $u_n$  tend vers  $\frac{10}{9}$ .

$$\boxed{1, 11111\dots = \frac{10}{9}.}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $u_n = 0, \underbrace{99\dots 9}_n$ . On a

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{10^n}$  tend vers 0, et donc,  $u_n$  tend vers 1.

$$\boxed{0, 9999\dots = 1.}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $u_n = \underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$ . On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2} &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\pi/2}\right) (= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n i^k\right)) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{(n+1)i\pi/2}}{1 - e^{i\pi/2}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4} - 2i \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{e^{i\pi/4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N} + 1) \\ 0 & \text{si } n \in (4\mathbb{N} + 2) \cup (4\mathbb{N} + 3) \end{cases} \end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que  $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$ , on a immédiatement  $S_{4n} = 1$ ,  $S_{4n+1} = S_{4n} + 0 = 1$ ,  $S_{4n+2} = S_{4n+1} - 1 = 0$  et  $S_{4n+3} = S_{4n+2} + 0 = 0$ .

6. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Posons  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ . Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k.$$

- **1er cas.** Si  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , alors  $e^{i\theta} \neq 1$ . Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1)/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \operatorname{Re}(C_n + iS_n) = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \operatorname{Im}(C_n + iS_n) = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

- **2ème cas.** Si  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ , on a immédiatement  $C_n = n + 1$  et  $S_n = 0$ .

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

7. Soient  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $-x \neq 1$ , on a

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} (1 - (-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S'_n(t) dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme  $\frac{1}{n+1}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \ln(1+x).$$

En particulier,

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$$

8. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$ . La suite  $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une suite géométrique, de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 - 3 = -2$ . On en déduit que, pour  $n$  entier naturel donné,  $u_n - 3 = -2 \cdot 2^n$ . Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 3 - 2 \sum_{k=0}^n 2^k = 3(n+1) - 2 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour tout naturel non nul  $k$ , on a  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul  $k$ , on a  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$ , et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- **Calcul de  $S_1$ .** Posons  $P_1 = aX^2 + bX + c$ . On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_1(X+1) - P_1(X) = X &\Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$



- **Calcul de  $S_2$ .** Posons  $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a+b+c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a+2b = 0 \text{ et } a+b+c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Calcul de  $S_3$ .** Posons  $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ . On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1, 6a+3b = 0, 4a+3b+2c = 0 \text{ et } a+b+c+d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftrightarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- **Calcul de  $S_4$ .** Posons  $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$ . On a

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2) \\ &\quad + e((X+1) - X) \\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1, 10a+4b = 0, 10a+6b+3c = 0, 5a+4b+3c+2d = 0 \\ &\quad \text{et } a+b+c+d+e = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30} \\ &\Leftrightarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \sum_{k=1}^n (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=1}^n k)^2$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On rappelle que

$$\forall (a, b) \in ]0, +\infty[^2, \arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}.$$

Soit alors  $k$  un entier naturel non nul. On a

$$\arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan \frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $k$  entier naturel non nul donné, on a

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=1}^n \arctan(k+1) - \sum_{k=1}^n \arctan(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les  $n^2$  couples  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i, j \leq n$ , il y en a  $n$  tels que  $i = j$  et donc  $n^2 - n = n(n-1)$  tels que  $1 \leq i, j \leq n$  et  $i \neq j$ . Comme il y a autant de couples  $(i, j)$  tels que  $i > j$  que de couples  $(i, j)$  tels que  $i < j$ , il y a  $\frac{n(n-1)}{2}$  couples  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i < j \leq n$ . Finalement,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n nj = n \sum_{j=1}^n j = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} j &= \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n (j-1)j = \sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j \\ &= \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)^2}{6}. \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left( \sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \left( \sum_{1 \leq j \leq n} j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^2 k^2 = \sum_{h=1}^n \left( h^2 \sum_{k=1}^n k^2 \right) = \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) \left( \sum_{h=1}^n h^2 \right) = \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2.$$

Comme d'autre part,  $\sum_{h=1}^n h^4 = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ , on a

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^4 = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{k=1}^n h^4 \right) = \sum_{h=1}^n n h^4 = n \sum_{h=1}^n h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr  $\sum_{1 \leq h, k \leq n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^5} \left( 2.5 \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18 \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} \right) \\ &= \frac{1}{n^5} (2n^6 - 2n^6 + n^5 \left( \frac{15}{3} - \frac{12}{2} \right)) + \text{termes de degré au plus 4} \\ &= -1 + \text{termes tendant vers 0} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

2. Soit  $a \in ]0, \pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, pour tout naturel non nul  $k$ , on a  $0 < \frac{a}{2^k} \leq \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$ .  
On sait alors que pour tout réel  $x$ ,  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ . Par suite, pour tout naturel  $k$ ,

$$\sin\left(2 \cdot \frac{a}{2^k}\right) = 2 \sin \frac{a}{2^k} \cos \frac{a}{2^k} \quad \text{et donc} \quad \cos \frac{a}{2^k} = \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^k)} = \frac{\sin a}{2^n \sin(a/2^n)}.$$