



## Logique, ensembles et applications

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*IT

---

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

- ( $f$  étant une application du plan dans lui-même)
  - $f$  est l'identité du plan.
  - $f$  a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
- ( $f$  étant une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
  - $f$  est l'application nulle.
  - L'équation  $f(x) = 0$  a une solution.
  - L'équation  $f(x) = 0$  a exactement une solution.
- (( $u_n$ ) $_{n \in \mathbb{N}}$  étant une suite réelle)
  - La suite ( $u_n$ ) $_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.
  - La suite ( $u_n$ ) $_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - La suite ( $u_n$ ) $_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

Correction ▼

[005103]

### Exercice 2 \*IT

---

Donner la négation des phrases suivantes

- $x \geq 3$
- $0 < x \leq 2$ .

Correction ▼

[005104]

### Exercice 3 \*\*IT

---

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

- $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$  ou  $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ .

Donner un exemple de fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Correction ▼

[005105]

### Exercice 4 \*\*IT

---

Dans chacun des cas suivants, déterminer  $f(I)$  puis vérifier que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  puis préciser  $f^{-1}$  :

1.  $f(x) = x^2 - 4x + 3, I = ]-\infty, 2]$ .
2.  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, I = ]-2, +\infty[$ .
3.  $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1, I = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ .
4.  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, I = \mathbb{R}$ .

Correction ▼

[005106]

### Exercice 5 \*\*IT

Pour  $z \neq i$ , on pose  $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ . Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$  sur  $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$ . Préciser  $f^{-1}$ .

Correction ▼

[005107]

### Exercice 6 \*\*T

Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ . Trouver une démonstration directe.

Correction ▼

[005108]

### Exercice 7 \*\*\*I

1. Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ . En calculant la différence  $(k+1)^2 - k^2$ , trouver une démonstration directe de ce résultat.
2. Calculer de même les sommes  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=1}^n k^3$  et  $\sum_{k=1}^n k^4$  (et mémoriser les résultats).
3. On pose  $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ . Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les  $S_p$  de proche en proche.

Correction ▼

[005109]

### Exercice 8 \*IT

Montrer que :  $(g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective})$  et  $(g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective})$ .

Correction ▼

[005110]

### Exercice 9 \*\*T

Parmi  $f \circ g \circ h$ ,  $g \circ h \circ f$  et  $h \circ f \circ g$  deux sont injectives et une est surjective. Montrer que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont bijectives.

Correction ▼

[005111]

### Exercice 10 \*\*T

$A$  et  $B$  sont des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

1.  $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$ .
2.  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .
3.  $A \Delta B = B \Delta A$ .
4.  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
5.  $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$ .
6.  $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$ .

**Exercice 11** \*\*\*IT

Soient  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $E$  indexée par un ensemble  $I$  et  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $F$  indexée par un ensemble  $I$ . Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ . Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1.  $f(\bigcup_{i \in I} A_i)$  et  $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$  (recommencer par  $f(A \cup B)$  si on n'a pas les idées claires).
2.  $f(\bigcap_{i \in I} A_i)$  et  $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$ .
3.  $f(E \setminus A_i)$  et  $F \setminus f(A_i)$ .
4.  $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$  et  $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .
5.  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$  et  $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .
6.  $f^{-1}(F \setminus B_i)$  et  $E \setminus f^{-1}(B_i)$ .

**Exercice 12** \*\*\*IT

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes ( $f$  est une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même) :

1.  $f$  est injective.
2.  $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$ .
3.  $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ .
4.  $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset$ .
5.  $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ .

**Exercice 13** \*\*\*\*\*

$k$  est un entier impair. Montrer par récurrence que, pour  $n \geq 1$ , la somme  $1^k + 2^k + \dots + n^k$  est un entier divisible par  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Exercice 14** \*\*\*\*

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que, pour  $n \geq 2$ ,  $H_n$  n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que  $H_n$  est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distinguant les cas où  $n$  est pair et  $n$  est impair).

**Exercice 15** \*\*\*I Théorème de CANTOR

1. Montrer qu'il existe une injection de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .
2. En considérant la partie  $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$ , montrer qu'il n'existe pas de bijection  $f$  de  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exercice 16** \*\*\*\* Une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$

Soit  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ . Montrer que  $f$  est une bijection. Préciser, pour  $n \in \mathbb{N}$  donné, le couple  $(x, y)$  dont il est l'image.

$$(x, y) \mapsto y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

[Correction ▼](#)

[005118]

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. (a)  $(f = Id_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{P}, f(M) = M)$  et  $(f \neq Id_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{P} / f(M) \neq M)$ .  
(b)  $(f$  a au moins un point fixe  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{P} / f(M) = M)$  et  $(f$  n'a pas de point fixe  $\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{P}, f(M) \neq M)$ .

Constatez que les phrases  $f(M) = M$  ou  $f(M) \neq M$  n'ont aucun sens si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.

2. (a)  $(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$  et  $(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0)$ .  
(b) L'équation  $f(x) = 0$  a (au moins) une solution si et seulement si  $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$  et l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$ .  
(c) L'équation  $f(x) = 0$  a exactement une solution si et seulement si  $\exists! x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$  et l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas exactement une solution si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$  ou  $\exists(x, x') \in \mathbb{R}^2 / (x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x') = 0)$ .
3. (a)  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M)$  et  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non bornée  $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} / \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M)$ .  
(b)  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} \geq u_n)$  et  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non croissante  $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / u_{n+1} < u_n)$ .  
(c)  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monotone  $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} \geq u_n)$  ou  $(\forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} \leq u_n)$ ) et  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non monotone  $\Leftrightarrow ((\exists n \in \mathbb{N} / u_{n+1} < u_n)$  et  $(\exists n \in \mathbb{N} / u_{n+1} > u_n))$ .
- 

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

Le contraire de  $x \geq 3$  est  $x < 3$ . Le contraire de  $0 < x \leq 2$  est  $((x \leq 0)$  ou  $x > 2)$ .

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel  $x_0$ ,  $f(x_0)$  et  $g(x_0)$  sont tous deux nuls.  
2. Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité  $fg = 0$ . La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de  $(f = 0$  ou  $g = 0)$ . Voici un exemple de fonctions  $f$  et  $g$  toutes deux non nulles dont le produit est nul. Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Pour chaque valeur de  $x$ , on a soit  $f(x) = 0$  (quand  $x \leq 0$ ), soit  $g(x) = 0$  (quand  $x \geq 0$ ). On a donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0$  ou  $g(x) = 0)$  ou encore  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0$  ou enfin,  $fg = 0$ . Cependant,  $f(1) = 1 \neq 0$  et donc  $f \neq 0$ , et  $g(-1) = -1 \neq 0$  et donc  $g \neq 0$ . Ainsi, on n'a pas  $(f = 0$  ou  $g = 0)$  ou encore, on n'a pas  $((\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$  ou  $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0))$ .

---

## Correction de l'exercice 4 ▲

---

1.  $f$  est dérivable sur  $I = ]-\infty, 2]$ , et pour  $x \in ]-\infty, 2[$ ,  $f'(x) = 2x - 4 < 0$ .  $f$  est donc continue et strictement décroissante sur  $] - \infty, 2]$ . Par suite,  $f$  réalise une bijection de  $] - \infty, 2]$  sur  $f(] - \infty, 2]) = [f(2), \lim_{-\infty} f[ = [-1, +\infty[ = J$ . On note  $g$  l'application de  $I$  dans  $J$  qui, à  $x$  associe  $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$ .  $g$  est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons  $g^{-1}$ . Soit  $y \in [-1, +\infty[$  et  $x \in ] - \infty, 2]$ .

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$

Or,  $\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1 \geq 0$ . Donc,  $x = 2 + \sqrt{y + 1}$  ou  $x = 2 - \sqrt{y + 1}$ . Enfin,  $x \in ] - \infty, 2]$  et donc,  $x = 2 - \sqrt{y + 1}$ . En résumé,

$$\forall x \in ]-\infty, 2], \forall y \in [-1, +\infty[, y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver  $g^{-1}$  :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.$$

2. On vérifie facilement que  $f$  réalise une bijection de  $] - 2, +\infty[$  sur  $] - \infty, 2[$ , notée  $g$ . Soient alors  $x \in ] - 2, +\infty[$  et  $y \in ] - \infty, 2[$ .

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour  $x$  à savoir  $x = \frac{2y+1}{-y+2}$ , mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de  $] - 2, +\infty[$  car on sait à l'avance que  $y$  admet au moins un antécédent dans  $] - 2, +\infty[$ , et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,

$$\forall x \in ] - 2, +\infty[, \forall y \in ] - \infty, 2[, y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

On vient de trouver  $g^{-1}$  :

$$\forall x \in ] - \infty, 2[, g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}.$$

3.  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ .  $f$  est donc bijective de  $[-\frac{3}{2}, +\infty[$  sur  $f([-\frac{3}{2}, +\infty[) = [f(-\frac{3}{2}), \lim_{+\infty} f] = [-1, +\infty[$ . Notons encore  $f$  l'application de  $[-\frac{3}{2}, +\infty[$  dans  $[-1, +\infty[$  qui à  $x$  associe  $\sqrt{2x+3}-1$ . Soient alors  $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$  et  $y \in [-1, +\infty[$ .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + (y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1.$$

En résumé,  $\forall x \in [-\frac{3}{2}, +\infty[, \forall y \in [-1, +\infty[, y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1$ . On vient de trouver  $g^{-1}$  :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1.$$

4.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire. Pour  $x \in [0, +\infty[, 0 \leq f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$ . Donc,  $f([0, +\infty[) \subset [0, 1[$ . Par parité,  $f(]-\infty, 0]) \subset ]-1, 0]$  et même  $f(]-\infty, 0]) \subset ]-1, 0[$  car l'image par  $f$  d'un réel strictement négatif est un réel strictement négatif. Finalement,  $f(\mathbb{R}) \subset ]-1, 1[$ . Vérifions alors que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] - 1, 1[$ . Soit  $y \in [0, 1[$  et  $x \in \mathbb{R}$ . L'égalité  $f(x) = y$  impose à  $x$  d'être dans  $[0, +\infty[$ . Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel  $x$  obtenu est bien défini, car  $y \neq 1$ , et positif, car  $y \in [0, 1[$ . On a montré que :

$$\forall y \in [0, 1[, \exists ! x \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit  $y \in ] - 1, 0[$  et  $x \in \mathbb{R}$ . L'égalité  $f(x) = y$  impose à  $x$  d'être dans  $] - \infty, 0[$ . Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel  $x$  obtenu est bien défini, car  $y \neq -1$ , et strictement négatif, car  $y \in ]-1, 0[$ . On a montré que :

$$\forall y \in ]-1, 0[, \exists ! x \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in ]-1, 1[, \exists ! x \in \mathbb{R} / y = f(x),$$

ce qui montre que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] - 1, 1[$ . De plus, pour  $y \in ] - 1, 1[$  donné,  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$  si  $y \geq 0$  et  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$  si  $y < 0$ . Dans tous les cas, on a  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ .

En notant encore  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $] - 1, 1[$  qui à  $x$  associe  $\frac{x}{1+|x|}$ , on a donc

$$\forall x \in ] - 1, 1[, f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Montrons que la restriction de  $f$  à  $D$ , notée  $g$ , est bien une application de  $D$  dans  $P$ . Soit  $z \in D$ . On a  $|z| < 1$  et en particulier  $z \neq i$ . Donc,  $f(z)$  existe. De plus,

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \right) = \frac{1}{2} \frac{2z\bar{z} - 2}{(z-i)(\bar{z}-i)} = \frac{|z|^2 - 1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc,  $f(z)$  est élément de  $P$ .  $g$  est donc une application de  $D$  dans  $P$ .

2. Montrons que  $g$  est injective. Soit  $(z, z') \in D^2$ .

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz' - iz = iz - iz' \Rightarrow 2i(z' - z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3. Montrons que  $g$  est surjective. Soient  $z \in D$  et  $Z \in P$ .

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (car } Z \neq 1,$$

(ce qui montre que  $Z$  admet au plus un antécédent dans  $D$ , à savoir  $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$  (mais on le sait déjà car  $g$  est injective). Il reste cependant à vérifier que  $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$  est effectivement dans  $D$ ). Réciproquement, puisque  $\operatorname{Re}(Z) < 0$ ,

$$\left| \frac{i(Z+1)}{Z-1} \right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

( $Z$  étant strictement plus proche de  $-1$  que de  $1$ ) et  $z \in D$ . Finalement  $g$  est une bijection de  $D$  sur  $P$ , et :

$$\forall z \in P, g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Montrons par récurrence que  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ . • Pour  $n = 1, \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1)(1+2)}$  et la formule proposée est vraie pour  $n = 1$ . Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$  et montrons que  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Démonstration directe. Pour  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Montrons par récurrence que :  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ . Pour  $n = 1, \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$ . Soit  $n \geq 1$ .  
Supposons que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et montrons que  $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

**1ère démonstration.** Pour  $k \geq 1, (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$  et donc  $\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = 2\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$  ce qui s'écrit  $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^n k + n$  ou encore  $2\sum_{k=1}^n k = n^2 + n$  ou enfin  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**2ème démonstration.** On écrit

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S \\
n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S
\end{array}$$



et en additionnant (verticalement), on obtient  $2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$  d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^n (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1).$$

**3ème démonstration.** On compte le nombre de points d'un rectangle ayant  $n$  points de large et  $n+1$  points de long. Il y en a  $n(n+1)$ . Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun  $1+2+\dots+n$  points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{cccccccc} * & & * & * & \dots & & \dots & * \\ * & * & & \ddots & & & & \vdots \\ * & * & * & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & * & * & * \\ \vdots & & & & & \ddots & & * & * \\ * & \dots & & \dots & * & * & & * & * \end{array}$$

**4ème démonstration.** Dans le triangle de PASCAL, on sait que pour  $n$  et  $p$  entiers naturels donnés,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Donc, pour  $n \geq 2$  (le résultat est clair pour  $n = 1$ ),

$$1 + 2 + \dots + n = 1 + \sum_{k=2}^n C_k^1 = 1 + \sum_{k=2}^n (C_{k+1}^2 - C_k^2) = 1 + (C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour  $k \geq 1$ ,  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ . Donc, pour  $n \geq 1$  :

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left( (n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{1}{6} (2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + n),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Pour  $k \geq 1$ ,  $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ . Donc, pour  $n \geq 1$ , on a

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} ((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4} ((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1) + 2n + 1)) \\ &= \frac{1}{4} ((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=1}^n k)^2.$$

Pour  $k \geq 1$ ,  $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ . Donc, pour  $n \geq 1$ ,

$$5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1) - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n \\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1)) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=1}^n k)^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}. \end{aligned}$$

3. Soit  $p$  un entier naturel. Pour  $k \geq 1$ ,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j k^j.$$

Donc, pour  $n \geq 1$  :

$$\sum_{j=0}^p C_{p+1}^j (\sum_{k=1}^n k^j) = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=0}^p C_{p+1}^j k^j) = \sum_{k=1}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

D'où la formule de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j S_j = (n+1)^{p+1} - 1.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective)}. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ ,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , et donc  $f$  est injective.

2. Soit  $y \in H$ . Puisque  $g \circ f$  est surjective, il existe un élément  $x$  dans  $E$  tel que  $g(f(x)) = y$ . En posant  $z = f(x) \in G$ , on a trouvé  $z$  dans  $G$  tel que  $g(z) = y$ . On a montré :  $\forall y \in H, \exists z \in G / g(z) = y$ , et donc  $g$  est surjective.

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

On peut supposer sans perte de généralité que  $f \circ g \circ h$  et  $g \circ h \circ f$  sont injectives et que  $h \circ f \circ g$  est surjective. D'après l'exercice 8, puisque  $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$  est injective,  $h$  est injective et puisque  $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$  est surjective,  $h$  est surjective. Déjà  $h$  est bijective. Mais alors,  $h^{-1}$  est surjective et donc  $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$  est surjective en tant que composée de surjections. Puis  $h^{-1}$  est injective et donc  $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$  est injective.  $f \circ g$  est donc bijective.  $f \circ g$  est surjective donc  $f$  est surjective.  $g \circ h \circ f$  est injective donc  $f$  est injective. Donc  $f$  est bijective. Enfin  $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$  est bijective en tant que composée de bijections.

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si  $A = B = \emptyset$  alors  $A \Delta B = \emptyset = A \cap B$ . Si  $A \Delta B = A \cap B$ , supposons par exemple  $A \neq \emptyset$ . Soit  $x \in A$ . Si  $x \in B$ ,  $x \in A \cap B = A \Delta B$  ce qui est absurde et si  $x \notin B$ ,  $x \in A \Delta B = A \cap B$  ce qui est absurde. Donc  $A = B = \emptyset$ . Finalement,  $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$ .
2. Par distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$ ,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A) \\ &= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \quad (\text{car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B) \\ &= ((A \cap C) \cap C) \cup ((A \cap C) \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\end{aligned}$$

3.  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$ .

4.

$$\begin{aligned}x \in (A \Delta B) \Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A \Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux} \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A \Delta B)) \\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,  $A \Delta (B \Delta C)$  est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties  $A$ ,  $B$  ou  $C$  ou dans les trois. Donc  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ . Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes  $A \Delta B \Delta C$ .

5.  $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$  et  $B \setminus A = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$ .

$$A \neq B \Rightarrow \exists x \in E / ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)) \Rightarrow \exists x \in E / x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B \Rightarrow A \Delta B \neq \emptyset.$$

6.  $\Leftarrow$  Immédiat.

$\Rightarrow$  Soit  $x$  un élément de  $A$ .

Si  $x \notin C$  alors  $x \in A \Delta C = B \Delta C$  et donc  $x \in B$  car  $x \notin C$ .

Si  $x \in C$  alors  $x \notin A \Delta C = B \Delta C$ . Puis  $x \notin B \Delta C$  et  $x \in C$  et donc  $x \in B$ . Dans tous les cas,  $x$  est dans  $B$ . Tout élément de  $A$  est dans  $B$  et donc  $A \subset B$ . En échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ , on a aussi  $B \subset A$  et finalement  $A = B$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned}
x \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y \in \bigcup_{i \in I} A_i / x = f(y) \Leftrightarrow \exists i \in I, \exists y \in A_i / x = f(y) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I / x \in f(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)
\end{aligned}$$

Donc

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

2. Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned}
x \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y \in \bigcap_{i \in I} A_i / x = f(y) \Leftrightarrow \exists y \in E / \forall i \in I, y \in A_i \text{ et } x = f(y) \\
&\Rightarrow \forall i \in I / \exists y \in A_i / x = f(y) \Leftrightarrow \forall i \in I / x \in f(A_i) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)
\end{aligned}$$

Donc

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

L'inclusion contraire n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour  $x$  réel on pose  $f(x) = x^2$  puis  $A = \{-1\}$  et  $B = \{1\}$ .  $A \cap B = \emptyset$  et donc  $f(A \cap B) = \emptyset$  puis  $f(A) = f(B) = \{1\}$  et donc  $f(A) \cap f(B) = \{1\}$ .

3. Il n'y a aucune inclusion vraie entre  $f(E \setminus A)$  et  $F \setminus f(A)$ . Par exemple, soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A = [-1, 2]$ .  $f(A) = [0, 4]$  et donc  $C_{\mathbb{R}}(f(A)) = ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[$  mais  $f(C_{\mathbb{R}}A) = f(]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[) = ]1, +\infty[$  et aucune inclusion entre les deux parties n'est vraie.

4. Soit  $x \in E$ .

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I, f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

5. Soit  $x \in E$ .

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I, f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

6. Soit  $x \in E$ .

$$x \in f^{-1}(F \setminus B_i) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus B_i \Leftrightarrow f(x) \notin B_i \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$f^{-1}(F \setminus B_i) = E \setminus f^{-1}(B_i).$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

**1)  $\Rightarrow$  2)** Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . On a toujours  $X \subset f^{-1}(f(X))$ . (En effet, pour  $x \in E$ ,  $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ ). Réciproquement, soit  $x \in E$ .

$$x \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X / f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X / x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ \Rightarrow x \in X.$$

Finalement,  $f^{-1}(f(X)) \subset X$  et donc  $f^{-1}(f(X)) = X$ . **2)  $\Rightarrow$  1)** Soit  $x \in X$ . Par hypothèse,  $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$  ce qui signifie que  $f(x)$  a un et un seul antécédent à savoir  $x$ . Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par  $f$  et  $f$  est injective.

**1)  $\Rightarrow$  3)** Soit  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ . On a toujours  $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$  ( $X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$ ) et de même,  $f(X \cap Y) \subset f(Y)$  et finalement,  $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ . Réciproquement, soit  $y \in F$ .  $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x, x') \in X \times Y / y = f(x) = f(x')$ . Mais alors, puisque  $f$  est injective,  $x = x' \in X \cap Y$  puis  $y = f(x) \in f(X \cap Y)$ . Finalement,  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ .

**3)  $\Rightarrow$  4)** Soit  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ .  $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$ .

**4)  $\Rightarrow$  5)** Soit  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tel que  $Y \subset X$ . Puisque  $X \setminus Y \subset X$ , on a  $f(X \setminus Y) \subset f(X)$ . Mais, puisque  $Y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ , par hypothèse  $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \emptyset$ . Finalement,  $f(X \setminus Y) \subset f(X) \setminus f(Y)$ . Inversement, si  $f(X) \setminus f(Y) = \emptyset$ , l'inclusion contraire est immédiate et si  $f(X) \setminus f(Y) \neq \emptyset$ , un élément de  $f(X) \setminus f(Y)$  est l'image d'un certain élément de  $X$  qui ne peut être dans  $Y$  et donc est l'image d'un élément de  $X \setminus Y$  ce qui montre que  $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$  et finalement que  $f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$ .

**5)  $\Rightarrow$  1)** Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$  tel que  $x_1 \neq x_2$ . Posons  $X = \{x_1, x_2\}$  et  $Y = \{x_2\}$ . On a donc  $Y \subset X$ . Par hypothèse  $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$  ce qui fournit  $f(\{x_1\}) = f(\{x_1, x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$  ou encore,  $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$ . Maintenant, si  $f(x_1) = f(x_2)$  alors  $\{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\} = \emptyset$  (et pas  $\{f(x_1)\}$ ). Donc  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . On a montré que  $f$  est injective.

### Correction de l'exercice 14 ▲

Montrons par récurrence que, pour  $n \geq 2$ ,  $H_n$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{p_n}{q_n}$  où  $q_n$  est un entier pair et  $p_n$  est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier). Pour  $n = 2$ ,  $H_2 = \frac{3}{2}$  et  $H_2$  est bien du type annoncé. Soit  $n \geq 2$ . Supposons que pour tout entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ , on ait  $H_k = \frac{p_k}{q_k}$  où  $p_k$  est un entier impair et  $q_k$  est un entier pair et montrons que  $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$  où  $p_{n+1}$  est un entier impair et  $q_{n+1}$  est un entier pair. (Recherche. L'idée  $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n + q_n}{(n+1)q_n}$  ne marche à coup sûr que si  $(n+1)p_n + q_n$  est impair ce qui est assuré si  $n+1$  est impair et donc  $n$  pair)

**1er cas.** Si  $n$  est pair, on peut poser  $n = 2k$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas,  $H_{n+1} = \frac{(2k+1)p_n + q_n}{(2k+1)q_n}$  et  $H_{n+1}$  est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

**2ème cas.** Si  $n$  est impair, on pose  $n = 2k - 1$  où  $k \geq 2$  (de sorte que  $2k - 1 \geq 3$ ).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2} H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que  $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$  est du type  $\frac{K}{2K'+1}$  où  $K$  et  $K'$  sont des entiers. Ensuite, puisque  $2 \leq k \leq 2k-1 = n$ , par hypothèse de récurrence,  $H_k = \frac{p_k}{q_k}$  où  $p_k$  est un entier impair et  $q_k$  un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$  est un entier pair et  $(2K'+1)p_k$  est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque  $2q_k(2K'+1)$  est un entier pair,  $H_{n+1}$  est bien dans tous les cas de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $H_n$  est le quotient d'un entier impair par un entier pair et donc n'est pas un entier.

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

---

1. Il y a l'injection triviale  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

$$x \mapsto \{x\}$$

2. Soit  $f$  une application quelconque de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Montrons que  $f$  ne peut être surjective. Soit  $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$ . Montrons que  $A$  n'a pas d'antécédent par  $f$ . Supposons par l'absurde que  $A$  a un antécédent  $a$ . Dans ce cas, où est  $a$  ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement,  $A$  n'a pas d'antécédent et  $f$  n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble  $E$  (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

---

$f$  est bien une application de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  car, pour tout couple  $(x, y)$  d'entiers naturels, l'un des deux entiers  $x+y$  ou  $x+y+1$  est pair et donc,  $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$  est bien un entier naturel (on peut aussi constater que  $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\dots+(x+y)$  est entier pour  $x+y \geq 1$ ).

**Remarque.** La numérotation de  $\mathbb{N}^2$  a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	...	$x$	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
⋮							
$y$							
⋮							

Sur une parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ , la somme  $x + y$  est constante. Il en est de même de l'expression  $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$  et quand on descend de 1 en  $y$ , on avance de 1 dans la numérotation.

**Lemme.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! p \in \mathbb{N} / \frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ .

**Démonstration.** Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires  $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)_{p \geq 0}$  est strictement croissante. Néanmoins, on va fournir explicitement  $p$  en fonction de  $n$ . Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels.

$$\begin{aligned} \frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2 + p - 2n \leq 0 \text{ et } p^2 + 3p + 2 - 2n > 0 \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3 + \sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} < p + 1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Montrons que  $f$  est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier  $n$  donné). Soient  $n$  un entier naturel et  $p = E\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$  ( $p$  est un entier naturel). On pose  $\begin{cases} x + y = p \\ y = n - \frac{p(p+1)}{2} \end{cases}$  ou encore  $\begin{cases} y = n - \frac{p(p+1)}{2} \\ x = p - y = \frac{p(p+3)}{2} - n \end{cases}$ .

Tout d'abord,  $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n - \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = n$ . Mais il reste encore à vérifier que  $x$  et  $y$  ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque  $\frac{p(p+1)}{2}$  est un entier naturel et que  $n \geq \frac{p(p+1)}{2}$ ,  $y$  est bien un entier naturel. Ensuite,  $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} + p$  est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2} - n \geq \frac{p(p+3)}{2} - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right) = 0,$$

et  $x$  est bien un entier naturel. Ainsi, pour  $n$  naturel donné, en posant  $p = E\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$  puis  $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$  et  $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$ ,  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels tels que  $f((x, y)) = n$ .  $f$  est donc surjective. Montrons que  $f$  est injective. Pour cela, on montre que si  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels vérifiant  $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$ , alors nécessairement,  $x + y = p$  (et  $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$ ). Soient donc  $x$  et  $y$  deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leq \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + (x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que  $x + y = p$ . L'unicité du couple  $(x, y)$  est donc démontrée.  $f$  est une application injective et surjective et donc  $f$  est bijective. Sa réciproque est  $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  où

$$n \mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2} - n, n - \frac{p(p+1)}{2}\right)$$

$$p = E\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right).$$