



## Fonctions usuelles

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
 I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*I

---

1. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est paire,  $f'$  est impaire et si  $f$  est impaire,  $f'$  est paire.
2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  $f^{(n)}$  désignant la dérivée  $n$ -ième de  $f$ , montrer que si  $f$  est paire,  $f^{(n)}$  est paire si  $n$  est pair et impaire si  $n$  est impair.
3. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de  $f$  ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition «  $f$  est paire (ou impaire) » par la condition «  $f$  est  $T$ -périodique ».

[Correction ▼](#)

[005097]

### Exercice 2 \*\*

---

Trouver la plus grande valeur de  $\sqrt[n]{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

[Correction ▼](#)

[005098]

### Exercice 3 \*\*I

---

1. Etudier brièvement la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant  $a^b = b^a$ .

[Correction ▼](#)

[005099]

### Exercice 4

---

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ou inéquations suivantes :

1. (\*\*)  $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$ ,
2. (\*)  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ ,
3. (\*\*)  $2 \operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth} \frac{7}{9}$ ,
4. (\*\*)  $\ln_x(10) + 2 \ln_{10x}(10) + 3 \ln_{100x}(10) = 0$ ,
5. (\*\*)  $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ .

[Correction ▼](#)

[005100]

### Exercice 5 \*\*

---

Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ .

[Correction ▼](#)

[005101]

### Exercice 6

---

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (\*)  $f_1(x) = 2|2x - 1| - |x + 2| + 3x$ .
2. (\*\*)  $f_2(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$ .
3. (\*\*\*)  $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ .
4. (\*\*)  $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$ .
5. (\*\*\*)  $f_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  (à étudier sur  $]0, +\infty[$ ).
6. (\*\*)  $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$ .

[Correction ▼](#)

[005102]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est paire, alors, pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ . En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x),$$

et donc  $f'$  est impaire. De même, si  $f$  est impaire, pour tout réel  $x$ , on a  $f(-x) = -f(x)$ , et par dérivation on obtient pour tout réel  $x$ ,  $f'(-x) = f'(x)$ .  $f'$  est donc paire.

$$(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire}) \text{ et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})$$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Supposons  $f$  paire. Par suite, pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ . Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que  $f^{(n)}$  a la parité de  $n$ , c'est-à-dire que  $f^{(n)}$  est une fonction paire quand  $n$  est un entier pair et est une fonction impaire quand  $n$  est un entier impair. De même, si  $f$  est impaire et  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}$  a la parité contraire de celle de  $n$ .

3. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et impaire et  $F$  une primitive de  $f$ . Montrons que  $F$  est paire. Pour  $x$  réel, posons  $g(x) = F(x) - F(-x)$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

$g$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$  et par suite, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$ . Ainsi,  $g$  est la fonction nulle et donc, pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = F(-x)$ . On a montré que  $F$  est paire. Par contre, si  $f$  est paire,  $F$  n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction  $f : x \mapsto 1$  est paire, mais  $F : x \mapsto x + 1$  est une primitive de  $f$  qui n'est pas impaire.

4. On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ , que les dérivées successives d'une fonction  $T$ -périodique sont  $T$ -périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ ,  $f$  est  $\pi$ -périodique, mais la fonction  $F : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ , qui est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas  $\pi$ -périodique ni même périodique tout court.

## Correction de l'exercice 2 ▲

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \sqrt[n]{n}$  puis, pour  $x$  réel strictement positif,  $f(x) = x^{1/x}$  de sorte que pour tout naturel non nul  $n$ , on a  $u_n = f(n)$ .  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,  $f(x) = e^{\ln x/x}$ .  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$

Pour  $x > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \ln x$  et donc  $f'$  est strictement positive sur  $]0, e[$  et strictement négative sur  $]e, +\infty[$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $]0, e]$  et strictement décroissante sur  $]e, +\infty[$ . En particulier, pour  $n \geq 3$ ,

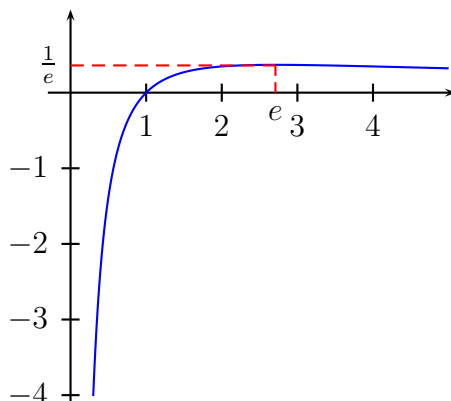
$$u_n = f(n) \leq f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme  $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$ , on a donc  $\text{Max}\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$ . Enfin,  $\sqrt{2} = 1,41\dots < 1,44\dots = \sqrt[3]{3}$  (on peut aussi constater que  $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$ ). Finalement,

$$\text{Max}\{\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \sqrt[3]{3} = 1,44\dots$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour  $x > 0$ , posons  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et, pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $]0, e]$  et strictement décroissante sur  $[e, +\infty[$ . Le graphe de  $f$  s'en déduit facilement :



2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a < b$ . On a alors

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Si  $a \geq 3$ , puisque  $f$  est strictement décroissante sur  $[e, +\infty[$ , on a alors  $f(a) > f(b)$  et en particulier,  $f(a) \neq f(b)$ .  $a$  n'est donc pas solution.  $a = 1$  n'est évidemment pas solution. Par exemple,  $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$  ce qui est exclu. Donc, nécessairement  $a = 2$  et  $b$  est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à  $e$ , vérifiant  $f(b) = f(2)$ . Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[e, +\infty[$ , l'équation  $f(b) = f(2)$  a au plus une solution dans  $[e, +\infty[$ . Enfin, comme  $2^4 = 16 = 4^2$ , on a montré que : il existe un et un seul couple  $(a, b)$  d'entiers naturels non nuls tel que  $a < b$  et  $a^b = b^a$ , à savoir  $(2, 4)$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\Leftrightarrow \ln \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq \ln 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq 2 \text{ et } x+1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geq 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leq 0 \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1} \geq 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0 \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \left( x \in \left] -\infty, -\frac{3}{5} \right] \cup \left[ -\frac{1}{2}, +\infty \right) \right) \text{ et } \left( \left[ -\infty, -\frac{1}{2} \right[ \cup \left[ -\frac{1}{3}, +\infty \right) \right) \text{ et } x \neq -1 \right. \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -1 \right[ \cup \left[ -1, -\frac{3}{5} \right] \cup \left[ -\frac{1}{3}, +\infty \right[ \end{aligned}$$

2. Pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \times \sqrt{x} (2 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

3.  $\operatorname{argch} 3 = \ln(3 + \sqrt{3^2 - 1}) = \ln(3 + \sqrt{8})$  et  $\operatorname{argth} \frac{7}{9} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right) = \ln\sqrt{8}$ . Donc,  $\operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth} \frac{7}{9} = \ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ . Par suite,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth} \frac{7}{9} &\Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{8}}}} \right) = \frac{3}{2\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}} \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4} \frac{1}{\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} - 1)}{4}. \end{aligned}$$

4. Pour  $x \in ]0, +\infty[ \setminus \left\{ \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1 \right\}$ ,

$$\begin{aligned} \ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x} + 2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)} + 3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10)) + 2\ln x(\ln x + 2\ln(10)) + 3\ln x(\ln x + \ln(10))}{\ln x(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10))} = 0 \\ &\Leftrightarrow 6\ln^2 x + 10\ln(10) \times \ln x + 2\ln^2(10) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \in \left\{ \frac{-5\ln(10) + \sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10) - \sqrt{13\ln^2(10)}}{6} \right\} \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ 10^{(-5 - \sqrt{13})/6}, 10^{(-5 + \sqrt{13})/6} \right\}. \end{aligned}$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans  $\left\{ \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1 \right\}$ ,  $\mathcal{S} = \left\{ 10^{(-5 - \sqrt{13})/6}, 10^{(-5 + \sqrt{13})/6} \right\}$ .

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1} &\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x - 1} = 3^{x + \frac{1}{2}} + 3^{x - \frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2^{2x - 1}(2 + 1) = 3^{x - \frac{1}{2}}(3 + 1) \Leftrightarrow 3 \times 2^{2x - 1} = 4 \times 3^{x - \frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2^{2x - 3} = 3^{x - \frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x - 3)\ln 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

Pour  $x > 0$ ,  $(x^x)^x = e^{x \ln(x^x)} = e^{x^2 \ln x}$  et  $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$ . Par suite,

$$\forall x > 0, \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x)).$$

Or,  $x^2 - x^x = -x^x(1 - x^{2-x}) = -e^{x \ln x}(1 - e^{(2-x)\ln x})$ . Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $(2-x)\ln x$  tend vers  $-\infty$ . Donc,  $1 - e^{(2-x)\ln x}$  tend vers 1 puis  $x^2 - x^x$  tend vers  $-\infty$ . Mais alors,  $\ln x(x^2 - x^x)$  tend vers  $-\infty$ , puis  $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x))$  tend vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.$$

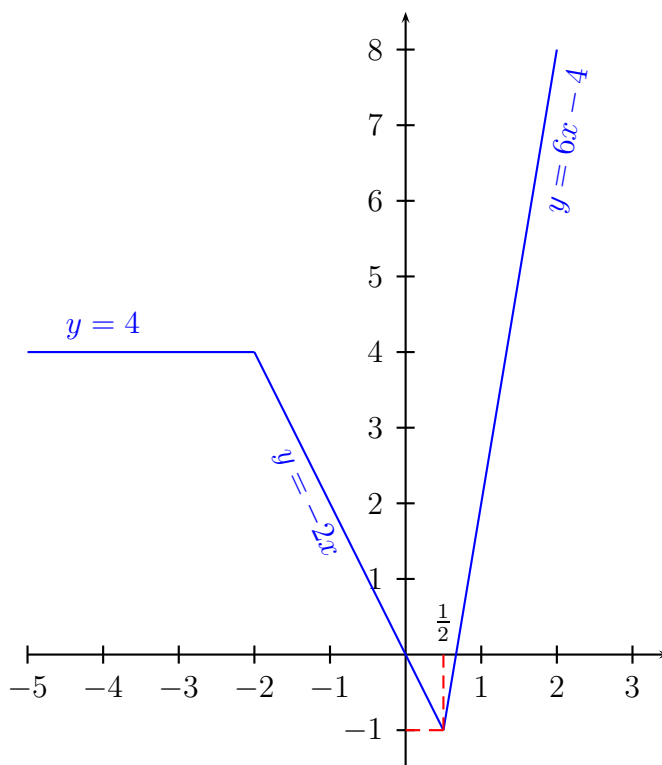
**Correction de l'exercice 6 ▲**

On notera  $\mathcal{C}_i$  le graphe de  $f_i$ .

1.  $f_1$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$ . On précise dans un tableau l'expression de  $f_1(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$1/2$	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	$-2x + 1$	$2x - 1$	
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$	
$f_1(x)$	$4$	$-2x$	$6x - 4$	

On en déduit  $\mathcal{C}_1$ .



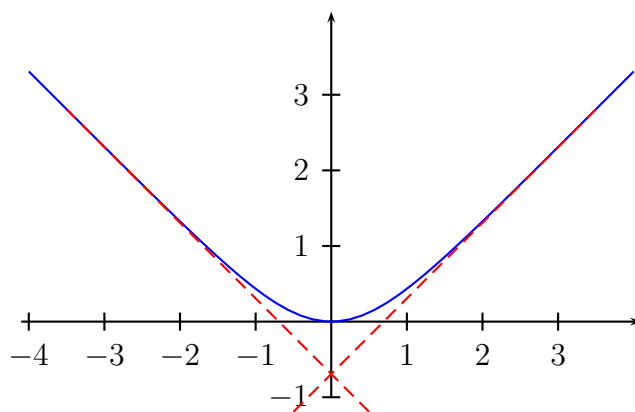
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\operatorname{ch} x \geq 1$  et donc  $f_2(x)$  existe et  $f_2(x) \geq 0$ .  $f_2$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $f_2$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , paire. Puisque la fonction  $x \mapsto \operatorname{ch} x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et que la fonction  $x \mapsto \ln x$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ ,  $f_2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et, par parité, strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ .  $f_2$  est paire et donc  $f_2'$  est impaire. Par suite,  $f_2'(0) = 0$  et  $\mathcal{C}_2$  admet l'axe des abscisses pour tangente en  $(0, f_2(0)) = (0, 0)$ . **Etude en  $+\infty$ .** Pour  $x \geq 0$ ,

$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $e^{-2x}$  tend vers 0 et donc,  $\ln(1 + e^{-2x})$  tend vers 0. On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - \ln 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}_2$  en  $+\infty$ . Par symétrie par rapport à la droite  $(Oy)$ , la droite  $(D')$  d'équation  $y = -x - \ln 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}_2$  en  $-\infty$ . Enfin, pour tout réel  $x$ ,

$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et  $\mathcal{C}_2$  est strictement au-dessus de  $(D)$  sur  $\mathbb{R}$ . De même,  $\mathcal{C}_2$  est strictement au-dessus de  $(D')$  sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit  $\mathcal{C}_2$ .



3.  $f_3$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . **Etude en  $-\infty$ .** Soit  $x \leq -1$ .

$$f_3(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Or, quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x - \sqrt{x^2 - 1}$  tend vers  $-\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 0$ . **Etude en  $+\infty$ .** Immédiatement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$ . Ensuite, pour  $x \geq 1$ ,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Mais alors,

$$f_3(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(-x + \sqrt{x^2 - 1})(-x - \sqrt{x^2 - 1})}{-x - \sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_3(x) - 2x) = 0$  et donc que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $\mathcal{C}_3$  en  $+\infty$ . **Etude en 1.** Pour  $x > 1$ ,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1) + \sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1} = 1 + \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}},$$

et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1) + \sqrt{(-x + 1)(x + 1)}}{-(-x + 1)} = 1 - \sqrt{\frac{x + 1}{-x + 1}}.$$

Par suite,  $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = -\infty$ . On en déduit que  $f_3$  n'est pas dérivable en 1, mais que  $\mathcal{C}_3$  admet deux demi-tangentes parallèles à  $(Oy)$  au point de  $\mathcal{C}_3$  d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en  $-1$ . **Etude des variations de  $f_3$ .** Pour  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $f_3(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  et donc

$$f_3'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Si  $x > 1$ , on a  $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$  et donc,  $f_3'(x) > 0$ . Si  $x < -1$ , on a

$$\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

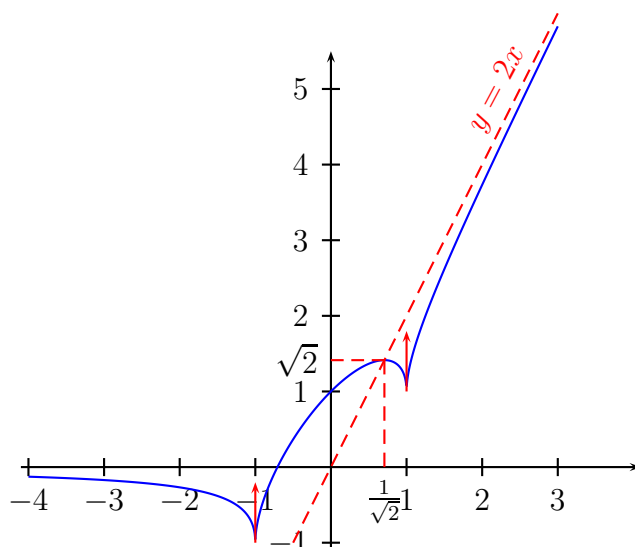
et donc,  $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$  puis  $f_3'(x) < 0$ . Ainsi,  $f_3$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$  et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ . Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f_3(x) = x + \sqrt{-x^2 + 1}$  et donc

$$f_3'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{-x^2 + 1} - x}{\sqrt{-x^2 + 1}}.$$

Si  $x \in ]-1, 0]$ , on a clairement  $f_3'(x) > 0$ . Si  $x \in [0, 1[$ , par stricte croissance de la fonction  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\operatorname{sgn}(f_3'(x)) = \operatorname{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x) = \operatorname{sgn}((-x^2+1)-x^2) = \operatorname{sgn}(1-2x^2) = \operatorname{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \operatorname{sgn}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-x\right].$$

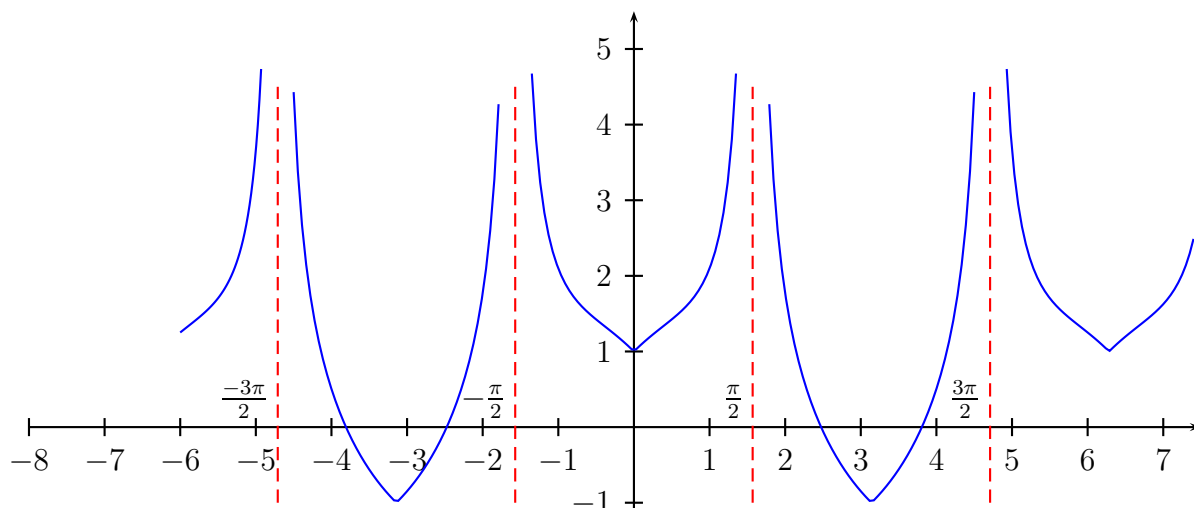
Donc,  $f_3'$  est strictement positive sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ , strictement négative sur  $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$  et s'annule en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . En résumé,  $f_3'$  est strictement négative sur  $]-\infty, -1[$  et sur  $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$  et strictement positive sur  $]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  et sur  $]1, +\infty[$ .  $f_3$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty, -1]$  et sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$  et strictement décroissante sur  $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$  et sur  $[1, +\infty[$ . On en déduit  $\mathcal{C}_3$ .



4.  $f_4$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ ,  $2\pi$ -périodique et paire. On étudie donc  $f_4$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi]$ . **Etude des variations de  $f_4$ .** Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f_4(x) = \tan x + \cos x$  et donc,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geq 1 - 1 = 0,$$

avec égalité si et seulement si  $\sin x = \cos^2 x = 1$  ce qui est impossible. Donc,  $f_4'$  est strictement positive sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et  $f_4$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . Pour  $x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $f_4(x) = -\tan x + \cos x$  et  $f_4$  est strictement décroissante sur  $]\frac{\pi}{2}, \pi]$  en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur  $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ . On a immédiatement  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$ . On en déduit  $\mathcal{C}_4$ .





5. Soit  $x > 0$ .  $x$  n'est pas nul donc  $\frac{1}{x}$  existe puis  $1 + \frac{1}{x} > 0$  et  $f_6(x)$  existe. **Etude en 0.** Pour  $x > 0$ ,  $x \ln(1 + \frac{1}{x}) = -x \ln x + x \ln(1+x)$ . Par suite,  $x \ln(1 + \frac{1}{x})$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures et donc  $f_5(x) = \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x}))$  tend vers 1. Posons encore  $f_5(0) = 1$  et étudions la dérivabilité de  $f_5$  en 0. Pour  $x > 0$ ,

$$\frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left( \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) - 1 \right) = \frac{\exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) - 1}{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

Or,  $x \ln(1 + \frac{1}{x})$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) - 1}{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part,  $\ln(1 + \frac{1}{x})$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi,  $f_5$  n'est pas dérivable en 0 mais  $\mathcal{C}_5$  admet l'axe des ordonnées pour tangente en  $(0, f_5(0)) = (0, 1)$ .

**Etude en  $+\infty$ .** Pour  $x > 0$ ,  $x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ . Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = e.$$

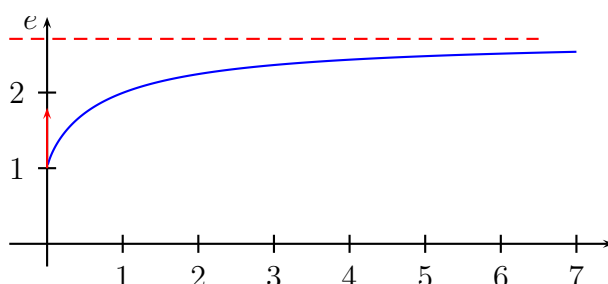
**Etude des variations de  $f_5$ .** Pour  $x > 0$ ,  $f_5(x) > 0$  puis  $\ln(f_5(x)) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$ . Par suite, pour  $x > 0$ ,

$$f_5'(x) = f_5(x) \ln(f_5)'(x) = f_5(x) \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}} \right) = f_5(x) g(x),$$

où  $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$ . Sur  $]0, +\infty[$ ,  $f_5'$  est du signe de  $g$ . Pour déterminer le signe de  $g$ , étudions d'abord les variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

$g$  est donc strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $g$  est strictement positive sur  $]0, +\infty[$ . Il en est de même de  $f_5'$ .  $f_5$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit  $\mathcal{C}_5$ .



6. **Domaine de définition de  $f_6$ .** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f_6(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln \frac{1}{2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \ln(x^2 - 5x + 6) > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, \frac{5 - \sqrt{3}}{2}[ \cup ] \frac{5 + \sqrt{3}}{2}, +\infty[ = \mathcal{D}_f.$$

**Variations de  $f_6$ .** La fonction  $x \mapsto x^2 - 5x + 6$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, \frac{5}{2}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{5}{2}, +\infty[$ . Comme  $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$  et que  $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$ , la fonction  $x \mapsto x^2 - 5x + 6$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ , à valeurs dans  $]0, +\infty[$ , intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est strictement croissante. La fonction  $x \mapsto 1 + \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln 2}$  a le même sens de variations et finalement  $f_6$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ . **Axe de symétrie** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2} - x \in \mathcal{D}_f$  et de plus,  $(\frac{5}{2} - x)^2 - 5(\frac{5}{2} - x) + 6 = x^2 - 5x + 6$ . Par suite,

$$\forall x \in D, f_6\left(\frac{5}{2} - x\right) = f_6(x).$$

$\mathcal{C}_6$  admet donc la droite d'équation  $x = \frac{5}{2}$  pour axe de symétrie.

Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit  $\mathcal{C}_6$ .

