Trigonométrie hyperbolique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***IT

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arcsin x)$,
2. $x \mapsto \arcsin(\sin x)$,
3. $x \mapsto \cos(\arccos x)$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos x)$,
5. $x \mapsto \tan(\arctan x)$,
6. $x \mapsto \arctan(\tan x)$.

Correction ▼ [005084]

Exercice 2 ***IT

1. Calculer $\arccos x + \arcsin x$ pour x élément de $[-1, 1]$.
2. Calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.
3. Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$ pour a réel donné.
4. Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\arctan a + \arctan b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Correction ▼ [005085]

Exercice 3 *IT

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Correction ▼ [005086]

Exercice 4 ***I

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$.

Correction ▼ [005087]

Exercice 5 **

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
2. $f_2(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

3. $f_3(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

4. $f_4(x) = \arctan\frac{1}{2x^2} - \arctan\frac{x}{x+1} + \arctan\frac{x-1}{x}$.

Correction ▼ [005088]

Exercice 6 **I

Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Correction ▼ [005089]

Exercice 7 ***I

Calculer $u_n = \arctan\frac{2}{1^2} + \arctan\frac{2}{2^2} + \ldots + \arctan\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. (Utiliser l'exercice 2 4))

Correction ▼ [005090]

Exercice 8 *

Etudier $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

Correction ▼ [005091]

Exercice 9 ** Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Exprimer, sur $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction ▼ [005092]

Exercice 10 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(2+x) + \operatorname{sh}(2+2x) + \ldots + \operatorname{sh}(2+100x) = 0$.

Correction ▼ [005093]

Exercice 11 **I

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0\operatorname{th}(2^0x) + 2^1\operatorname{th}(2^1x) + \cdots + 2^n\operatorname{th}(2^nx)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Correction ▼ [005094]

Exercice 12 **

Simplifier les expressions suivantes

1. $\sin(2\arcsin x)$,

2. $\cos(2\arccos x)$,
3. $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
5. $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$,
6. $\operatorname{argch}(2x^2-1)$,
7. $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)$,
8. $\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction ▼ [005095]

Exercice 13 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\operatorname{ch}x = 2$,
2. $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$,
3. $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Correction ▼ [005096]

Correction de l'exercice 1 ▲

$\arcsin x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\arcsin x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.

$\arcsin(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a $k \leqslant \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leqslant \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)$.

$\arccos x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\arccos x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.

$\arccos(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi$, alors $\arccos(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leqslant x < 2k\pi$ alors $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

Pour tout réel x, $\tan(\arctan x) = x$.

$\arctan(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. **1ère solution**. Posons $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ pour x dans $[-1,1]$. f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \arccos x$. Mais alors,

$$\arccos x + \arcsin x = \theta + \arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car $\frac{\pi}{2} - \theta$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

2. **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. f est impaire. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x).}$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \arctan x$. Mais alors,

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \theta + \arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \theta + \arctan\left(\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

3. $\cos^2(\arctan a) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus , $\arctan a$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\arctan a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ puis

$$\sin(\arctan a) = \cos(\arctan a)\tan(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan a) = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4. D'après 3),

$$\cos(\arctan a + \arctan b) = \cos(\arctan a)\cos(\arctan b) - \sin(\arctan a)\sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\arctan a + \arctan b) \neq 0$ et donc que $\tan(\arctan a + \arctan b)$ existe. On a immédiatement,

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\arctan a + \arctan b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\arctan a + \arctan b) > 0$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\arctan a + \arctan b) < 0$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\arctan a + \arctan b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\arctan a + \arctan b - \pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\arctan\frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\boxed{\arctan a + \arctan b = \begin{cases} \arctan\frac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \arctan\frac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \arctan\frac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{et} & \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b, \\ \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{et} & \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a \\ \mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1+\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} & \text{et} & \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\,a - \mathrm{th}\,b}{1-\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}. \end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$. En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + sh^2 x = 2ch^2 x - 1 = 2sh^2 x + 1,\ \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)) \text{ et } \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ et } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$.

La fonction $t \mapsto \arcsin \sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arcsin \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $t \mapsto \arccos \sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arccos \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \arcsin(\sqrt{\sin^2 x}) - 2 \sin x \cos x \arccos(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2 \sin x \cos x (\arcsin(|\sin x|) - \arccos(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que f est π-pérodique et paire. Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x (x - x) = 0$. f est donc constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{1/2} \arccos \sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. **1ère solution.** Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} x \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

   Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \arctan x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\arctan x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta=\arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x=\tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta=\cos\theta\tan\theta\ (\text{car }\cos\theta>0)\\&=\sin\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\arcsin(\sin\theta)=\theta\ \left(\text{car }\theta\text{ est dans }\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\\&=\arctan x.\end{aligned}$$

2. **1ère solution.** Pour tout réel x, $-1<-1+\frac{2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\leqslant -1+2=1$ (avec égalité si et seulement si $x=0$). f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x)=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x)=2\arctan x+C$ (y compris $x=0$ puisque f est continue en 0).
$x=0$ fournit $C=0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x)=2\arctan x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2\arctan|x|.}$$

2ème solution. Soit $x\in\mathbb{R}$ puis $\theta=\arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x=\tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x)=\arccos(\cos(2\theta))=\left\{\begin{array}{l}2\theta\text{ si }\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\-2\theta\text{ si }\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}2\arctan x\text{ si }x\geqslant 0\\-2\arctan x\text{ si }x\leqslant 0\end{array}\right.=2\arctan|x|.$$

3. La fonction $x\mapsto\arcsin\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x=1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}-\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(-\frac{1}{2}\arcsin)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité) $f_3(x)=-\frac{1}{2}\arcsin x+C$. $x=1$ fournit $C=\frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x = \frac{1}{2}\arccos x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2}\arcsin)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + \frac{\pi}{4}.}$$

4. f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1<x<0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} f(t) = \arctan\dfrac{1}{2} - (-\dfrac{\pi}{2}) + \arctan 2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$. Pour $x<-1$, $f(x) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[\end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$0 \leqslant \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on a donc $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{7}{9}$. De même, $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan\left(\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2 dans un cas particulier)
Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\arctan a \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan b \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\arctan a - \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1+\tan(\arctan a)\tan(\arctan b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\arctan a - \arctan b \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\boxed{\forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0,\ \arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

• Pour tout réel x, $\operatorname{ch} x > 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0.$$

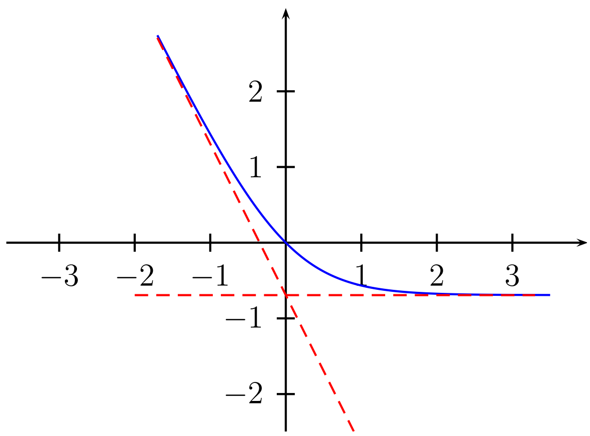
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. • Etude en $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc, $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x\to-\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0$ et donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1 + e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. • Etude en $+\infty$.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. • Graphe.



Correction de l'exercice 9 ▲

1. f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty,0[$, $f' > 0$, sur $]0,x_0[$, $f' > 0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f' < 0$, sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f' > 0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f' > 0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f' < 0$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f' > 0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100}\operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2\sum_{k=1}^{100}e^{kx} - e^{-2}\sum_{k=1}^{100}e^{-kx}\right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100\operatorname{sh}2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2}(1-e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x}-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-e^{100x})(e^{x+2}-e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On a vu au 3 que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\operatorname{th}^2x}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th}x + \frac{1}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\operatorname{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

2. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.

3. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos x) = \frac{1}{2}(1-\cos(\arccos x)) = \frac{1-x}{2}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0.$$

5. L'expression proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. Soit alors $x > 0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right) = \ln x\end{aligned}$$

Par imparité, si $x < 0$, $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$. En résumé, en notant ε le signe de x,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \varepsilon \ln|x|.}$$

6. L'expression proposée existe si et seulement si $2x^2-1 \in [1,+\infty[$ ou encore $x^2 \in [1,+\infty[$ ou enfin $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Cette expression est paire. Soit donc $x \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argch}(2x^2-1) &= \ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1}) = \ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)\\ &= 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = 2\operatorname{argch} x\end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}|x|.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \text{ existe} &\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \in]-1,1[\\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \in [0,1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0$ et d'autre part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}}{2}\\ &= \operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch}x+|\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x = e^x\end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.}$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

8. Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. $\operatorname{ch}x = 2 \Leftrightarrow x = \pm\operatorname{argch}2 = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).

2. Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\arcsin(2x) = \arcsin x+\arcsin(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin x+\arcsin(x\sqrt{2}))\\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2}+x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2-2x^2} = 2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\arcsin\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2},0]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin x$ existe si et seulement si $x \in [-1,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1]\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1,1]$, $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,
$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned}x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$
