

Trigonométrie hyperbolique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***IT

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\operatorname{arcsin} x)$,
2. $x \mapsto \operatorname{arcsin}(\sin x)$,
3. $x \mapsto \cos(\operatorname{arccos} x)$,
4. $x \mapsto \operatorname{arccos}(\cos x)$,
5. $x \mapsto \tan(\operatorname{arctan} x)$,
6. $x \mapsto \operatorname{arctan}(\tan x)$.

[Correction ▼](#)

[005084]

Exercice 2 ***IT

1. Calculer $\operatorname{arccos} x + \operatorname{arcsin} x$ pour x élément de $[-1, 1]$.
2. Calculer $\operatorname{arctan} x + \operatorname{arctan} \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.
3. Calculer $\cos(\operatorname{arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{arctan} a)$ pour a réel donné.
4. Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{arctan} a + \operatorname{arctan} b$ en fonction de $\operatorname{arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{arctan} a + \operatorname{arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

[Correction ▼](#)

[005085]

Exercice 3 *IT

Établir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

[Correction ▼](#)

[005086]

Exercice 4 ***I

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arccos} \sqrt{t} dt$.

[Correction ▼](#)

[005087]

Exercice 5 **

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$.
2. $f_2(x) = \operatorname{arccos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.
3. $f_3(x) = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$.
4. $f_4(x) = \operatorname{arctan} \frac{1}{2x^2} - \operatorname{arctan} \frac{x}{x+1} + \operatorname{arctan} \frac{x-1}{x}$.

Exercice 6 **I

Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

Exercice 7 ***I

Calculer $u_n = \arctan \frac{2}{1^2} + \arctan \frac{2}{2^2} + \dots + \arctan \frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (Utiliser l'exercice 2 4))

Exercice 8 *

Etudier $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

Exercice 9 ** Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x - 1},$$

et on appelle (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition \mathcal{D} de f ?
2. Exprimer, sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g .
4. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 10 **

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\operatorname{sh}(2+x) + \operatorname{sh}(2+2x) + \dots + \operatorname{sh}(2+100x) = 0$.

Exercice 11 **I

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \dots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n) .

Exercice 12 **

Simplifier les expressions suivantes

1. $\sin(2 \arcsin x)$,
2. $\cos(2 \arccos x)$,
3. $\sin^2 \left(\frac{\arccos x}{2} \right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$,
5. $\operatorname{argsh} \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)$,
6. $\operatorname{argch}(2x^2 - 1)$,

7. $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right),$

8. $\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}.$

[Correction ▼](#)

[005095]

Exercice 13 **

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\operatorname{ch}x = 2,$

2. $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}),$

3. $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$

[Correction ▼](#)

[005096]

Correction de l'exercice 1 ▲

$\arcsin x$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$. Donc, $\sin(\arcsin x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$ et pour x dans $[-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.

$\arcsin(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a $k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4})$. • S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leq \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = E(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4})$.

$\arccos x$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$. Donc, $\cos(\arccos x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$ et pour x dans $[-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$.

$\arccos(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0, \pi]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$, alors $\arccos(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = E(\frac{x}{2\pi})$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi$ alors $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = E(\frac{x+\pi}{2\pi})$.

Pour tout réel x , $\tan(\arctan x) = x$.

$\arctan(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x , il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = E(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. **1ère solution.** Posons $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ pour x dans $[-1, 1]$. f est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$. De plus, pour x dans $] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $[-1, 1]$ et pour x dans $[-1, 1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos \theta$, à savoir $\theta = \arccos x$. Mais alors,

$$\arccos x + \arcsin x = \theta + \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car $\frac{\pi}{2} - \theta$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

2. **1ère solution.** Pour x réel non nul, posons $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. f est impaire. f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur \mathbb{R}^*). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x).$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $] 0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan \theta$ à savoir $\theta = \arctan x$. Mais alors,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \theta + \arctan\left(\frac{1}{\tan \theta}\right) = \theta + \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $] 0, \frac{\pi}{2}[$).

3. $\cos^2(\arctan a) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus, $\arctan a$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\arctan a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a , $\cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ puis

$$\sin(\arctan a) = \cos(\arctan a) \tan(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

4. D'après 3),

$$\cos(\arctan a + \arctan b) = \cos(\arctan a) \cos(\arctan b) - \sin(\arctan a) \sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà, puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\arctan a + \arctan b) \neq 0$ et donc que $\tan(\arctan a + \arctan b)$ existe. On a immédiatement,

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\arctan a + \arctan b$ est dans $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\arctan a + \arctan b) > 0$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas, $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\arctan a + \arctan b) < 0$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Si de plus $a > 0$, $\arctan a + \arctan b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\arctan a + \arctan b$ est dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Dans ce cas, $\arctan a + \arctan b - \pi$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et a même tangente que $\arctan\frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\arctan a + \arctan b = \begin{cases} \arctan\frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \arctan\frac{a+b}{1-ab} + \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \arctan\frac{a+b}{1-ab} - \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} & \text{et} & \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}. \end{aligned}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$. En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1, \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)), \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)) \text{ et } \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ et } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$.

La fonction $t \mapsto \arcsin \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arcsin \sqrt{t} dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$. De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} . De même, la fonction $t \mapsto \arccos \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arccos \sqrt{t} dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Donc, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \arcsin(\sqrt{\sin^2 x}) - 2 \sin x \cos x \arccos(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2 \sin x \cos x (\arcsin(|\sin x|) - \arccos(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que f est π -périodique et paire. Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x (x - x) = 0$. f est donc constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{1/2} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{1/2} \arccos \sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π -périodicité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. **1ère solution.** Pour tout réel x , $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} , impaire, et pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} x \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x , $f_1(x) = \arctan x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan x.$$

- 2ème solution.** Pour x réel donné, posons $\theta = \arctan x$. θ est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et $x = \tan \theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \sqrt{\cos^2 \theta} \tan \theta = \cos \theta \tan \theta \text{ (car } \cos \theta > 0) \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

et donc

$$f_1(x) = \arcsin(\sin \theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \\ = \arctan x.$$

2. **1ère solution.** Pour tout réel x , $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1 + 2 = 1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$). f_2 est donc définie et continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* . Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x . Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2\arctan x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).

$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2\arctan x$. Par parité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan|x|.$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $\theta = \arctan x$. θ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \tan \theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta (1-\tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \arccos(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ -2\theta & \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases} = \begin{cases} 2\arctan x & \text{si } x \geq 0 \\ -2\arctan x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = 2\arctan|x|.$$

3. La fonction $x \mapsto \arcsin \sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car pour x élément de $[-1, 1]$, $1-x^2$ est élément de $[0, 1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $] -1, 1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $] -1, 1]$, dérivable sur $] -1, 0[\cup] 0, 1[$. Pour x dans $] -1, 0[\cup] 0, 1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $] 0, 1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2} \arcsin)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $] 0, 1[$ (par continuité) $f_3(x) = -\frac{1}{2} \arcsin x + C$. $x = 1$ fournit $C = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\forall x \in [0, 1], f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{1}{2} \arccos x.$$

Si x est dans $] -1, 0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2} \arcsin)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $] -1, 0[$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\forall x \in] -1, 0], f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + \frac{\pi}{4}.$$

4. f_4 est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et pour x élément de \mathcal{D} , on a :

$$f_4'(x) = -\frac{1}{x^3} \frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2} \frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ = -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0.$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1 < x < 0$, $f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} f(t) = \arctan \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \arctan 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Pour $x < -1$, $f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \pi & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$0 \leq \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{7}{9}$. De même, $\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan \left(\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} \right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2 dans un cas particulier)

Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\arctan a \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan b \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et donc, $\arctan a - \arctan b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a) \tan(\arctan b)} = \frac{a - b}{1 + ab},$$

et donc, puisque $\arctan a - \arctan b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \arctan a - \arctan b = \arctan \left(\frac{a-b}{1+ab} \right).$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

• Pour tout réel x , $\text{ch } x > 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \operatorname{sh}x \frac{1}{\operatorname{ch}x} - 1 = \operatorname{th}x - 1 < 0.$$

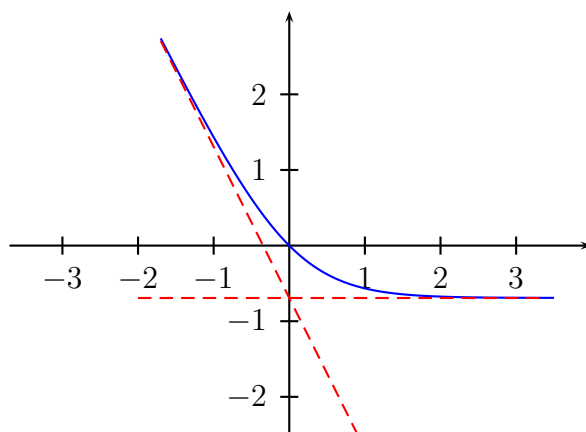
f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} . • Etude en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc, $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0$ et donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x , $\ln(1 + e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur \mathbb{R} . • Etude en $+\infty$.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. • Graphe.



Correction de l'exercice 9 ▲

1. f est définie et dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. Pour x élément de \mathcal{D} ,

$$f'(x) = 2x \arctan \frac{1}{2x-1} + (x^2-1) \frac{-2}{(2x-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x \arctan \frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \arctan \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. Pour x élément de $\mathcal{D} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x(2x^3-2x^2+x) - (x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1) + 2x^4 - 7x^2 + 4x - 1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7\left(x - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$, sur $] 0, \frac{1}{2}[$ et sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $] 0, \frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $] 0, \frac{1}{2}[$. g est de plus strictement négative sur $] x_0, \frac{1}{2}[$ et strictement positive sur $] 0, x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement

négative sur $]-\infty, 0[$. Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty, 0[$, $f' > 0$, sur $]0, x_0[$, $f' > 0$, sur $]x_0, \frac{1}{2}[$, $f' < 0$, sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, $f' > 0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $]-\infty, x_0[$, $f' > 0$, sur $]x_0, \frac{1}{2}[$, $f' < 0$ et sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, $f' > 0$. f est strictement croissante sur $]-\infty, x_0[$ et sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et est strictement décroissante sur $]x_0, \frac{1}{2}[$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2} \left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx} \right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2} \left(e^2 e^x \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^2 e^x \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} + e^{-2} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^{-x}} \right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x . Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}(1 - e^{100x}) + e^{-2}(1 - e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1 - e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - e^{100x})(e^{x+2} - e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{101} \right\}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On a vu au 3 que pour tout réel x , $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\operatorname{th}^2x}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th}x + \frac{1}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th}x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}x}.$$

Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th}x}.$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\operatorname{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
2. Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.
3. Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\sin^2(\frac{1}{2} \arccos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\arccos x)) = \frac{1-x}{2}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x . De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)\right) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln 1 = 0.$$

5. L'expression proposée est définie sur \mathbb{R}^* et impaire. Soit alors $x > 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1 + \sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1 + \sqrt{(x^2+1)^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right) = \ln x \end{aligned}$$

Par imparité, si $x < 0$, $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$. En résumé, en notant ε le signe de x ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \varepsilon \ln|x|.$$

6. L'expression proposée existe si et seulement si $2x^2-1 \in [1, +\infty[$ ou encore $x^2 \in [1, +\infty[$ ou enfin $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Cette expression est paire. Soit donc $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \operatorname{argch}(2x^2-1) &= \ln(2x^2-1 + \sqrt{(2x^2-1)^2-1}) = \ln(2x^2-1 + 2x\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2\right) \\ &= 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = 2\operatorname{argch}x \end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}|x|.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \text{ existe} &\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geq 0 \text{ et } \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \in]-1, 1[\\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \in [0, 1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geq 0$ et d'autre part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1} + \sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1} - \sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1} + \sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1) - (\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x + 2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2} \\ &= \operatorname{ch}x + \sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x + |\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x \end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

8. Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x} \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

- $\operatorname{ch} x = 2 \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{argch} 2 = \pm \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2 + \sqrt{3})$ et $-\ln(2 + \sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2 - \sqrt{3})$ car $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$).
- Une solution est nécessairement dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit donc $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\begin{aligned} \arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})) \\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1 - (x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 1 + 4x^2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4 - 6x^2 + 2) = (4x^2 + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}} \end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x , la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $(\pm\sqrt{\frac{7}{32}})^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leq \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin \sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2 \arcsin \sqrt{\frac{8}{16}} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ce qui achève la résolution.

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8} \right\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin x$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2 \arcsin(x)) = 2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus, $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2 \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$
