



## Divers

---

### 1 Un problème

#### Exercice 1

---

1. Prouver pour  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

en utilisant le secteur angulaire  $0 \leq \text{Arg}z \leq \frac{2\pi}{n}$ ,  $0 \leq |z| \leq R$ ,  $R \rightarrow +\infty$ , et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour  $R \rightarrow +\infty$ .

2. Montrer, en utilisant les contours  $\varepsilon \leq x \leq R$ ,  $z = Re^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{a}$ ),  $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$  ( $R \geq r \geq \varepsilon$ ),  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  ( $\frac{2\pi}{a} \geq \theta \geq 0$ ):

$$a \in \mathbb{R}, a > 1 \implies \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

Pour définir  $z^a$  comme fonction holomorphe sur  $\{z = re^{i\alpha} \mid 0 < r < \infty, 0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{a}\}$ , on pose  $z^a = r^a e^{ia\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$  (car  $\log r + i\alpha = \text{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + i\frac{\pi}{a}$ ; no comments).

3. Soit  $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a}$ ; justifier que l'intégrale définissant  $J(a)$  est convergente et analytique comme fonction de  $a$  pour  $\text{Re}(a) > 1$  et prouver  $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$ .

4. On définit maintenant

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$$

pour  $0 < p < 1$ . Justifier les identités (pour  $0 < p < 1$ ):

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p} J\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

5. Expliquer pourquoi l'intégrale  $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$  est convergente et analytique pour  $p$  complexe avec  $0 < \text{Re}(p) < 1$  et établir la formule  $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$  pour  $0 < \text{Re}(p) < 1$ .

6. Donner une preuve simple directe de la formule  $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$  pour tout  $p$  complexe avec  $0 < \text{Re}(p) < 1$  en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites  $z = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $z = x + 2\pi i$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

7. Dédurre de ce qui précède avec  $p = \frac{1}{2} + i\xi$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\text{ch}(t/2)} dt = \frac{2\pi}{\text{ch}(\pi\xi)},$$

Montrer que la transformation de Fourier  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} f(x) dx$  appliquée à la fonction  $f(x) = \frac{1}{\text{ch}(\pi x)}$  donne simplement  $\hat{f} = f$  (remarque: c'est aussi le cas avec  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ).

8. On revient à la formule générale  $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ . En séparant parties réelles et imaginaires dans  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$  déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut} \cos(vt)}{1+e^t} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut} \sin(vt)}{1+e^t} dt,$$

pour  $0 < u < 1, v \in \mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[002879]

## 2 Divers

### Exercice 2

Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})} dx$ .

[002880]

### Exercice 3

Déterminer  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx$ .

[002881]

### Exercice 4

Déterminer  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx$ .

[002882]

### Exercice 5

Montrer que les racines du polynôme  $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$  vérifiant  $|z| < 1$  sont simples et qu'il y en a exactement 50. *Indication* : utiliser le théorème de Rouché en écrivant  $P(z) = 3z^{50} + (z^{111} + 1)$  et calculer  $P'$  pour s'assurer que les racines avec  $|z| < 1$  sont simples.

[Correction ▼](#)

[002883]

### Exercice 6

Déterminer l'image par  $z \mapsto \frac{3z+5}{z+2}$  du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine; de la droite imaginaire, de la droite d'équation  $x = y$ , de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en  $-2$ .

[Correction ▼](#)

[002884]

### Exercice 7

Question de cours: quels sont les automorphismes de  $D(0, 1)$  avec 0 comme point fixe?

[002885]

### Exercice 8

Soit  $\alpha$  avec  $|\alpha| < 1$ . On sait que  $z \mapsto \phi_{\alpha}(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$  est un automorphisme du disque unité  $D(0, 1)$ . Trouver  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\phi_{\alpha}(z_1) = z_2, \phi_{\alpha}(z_2) = z_1$ . Deux points distincts arbitraires  $z_1$  et  $z_2$  étant donnés dans  $D(0, 1)$ , montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique à une rotation près (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

[Correction ▼](#)

[002886]

### Exercice 9

Trouver l'unique automorphisme du premier quadrant qui échange  $1+i$  et  $2+2i$ . On remarquera que  $z \mapsto z^2$  est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur, et que l'on peut donc ramener le problème à une question dans le demi-plan supérieur.

[002887]

---

**Exercice 10**

Soit  $f$  holomorphe sur  $\overline{D(0,1)}$ . On suppose  $|f(w)| \leq 8$  pour tout  $|w| \leq 1$  et  $f(\frac{3}{4}) = 0$ . Montrer  $|f(0)| \leq 6$ .  
*Indication* : trouver un automorphisme  $\phi$  du disque avec  $\phi(0) = \frac{3}{4}$  et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction  $\frac{1}{8}f(\phi(z))$ . Trouver le  $z$  avec  $\phi(z) = 0$ .

---

[002888]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $C_R = \{Re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$ . La fonction

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

a un seul pôle  $z_0 = e^{i\pi/n}$  dans le secteur. C'est un pôle simple et le résidu est

$$\text{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{z_0}{n} = -\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.$$

D'où

$$-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{Re^{i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n}$$

pour tout  $R > 1$ . Puisque  $n > 1$ , on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{R^n - 1} \int_{C_R} |dz| \right) = 0.$$

D'autre part,

$$\int_{Re^{2i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n} = -\int_0^R \frac{1}{1+x^n} e^{2i\pi/n} dx = -e^{2i\pi/n} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} = \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} - \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n}}{1 - e^{2i\pi/n}} \rightarrow \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}}{1 - e^{2i\pi/n}} = \frac{2i\pi}{n} \frac{1}{2i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

2. La fonction  $z^a = \exp(a(\log r + i\alpha))$  n'est pas définie au voisinage de l'origine. C'est la raison pour quoi on est amené de considérer le petit morceau de cercle  $\gamma_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta}; \frac{2\pi}{a} \geq \theta \geq 0\}$ . On va de nouveau noter  $C_R = \{Re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$  et

$$\Omega = \left\{ z = re^{i\alpha}; 0 < r < \infty, 0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{a} \right\}.$$

Pour  $z = re^{i\alpha} \in \Omega$  on a

$$\begin{aligned} z^a &= -1 \\ \iff a(\log r + i\alpha) &= i\pi \pmod{2i\pi} \\ \iff r &= 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f(z) = \frac{1}{1+z^a}$  a une seule singularité  $z_0 = e^{i\frac{\pi}{a}}$  dans  $\Omega$ . Comme  $f(z) = \frac{1}{h(z)}$  avec  $h(z_0) = 1+z_0^a = 0$  et

$$h'(z_0) = (\exp(a \log z))'_{|z=z_0} = \frac{a}{z_0} z_0^a \neq 0$$

le point  $z_0$  est un pôle simple et on a

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{h'(z_0)} = -\frac{z_0}{a} = -\frac{1}{a}e^{i\frac{\pi}{a}}.$$

Il suffit alors de procéder comme dans la question 1. pour établir

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)} \quad \text{pour } a > 1.$$

3. Soit  $x \in (0, \infty)$  et  $a = u + iv$  avec  $u > 1$ . Alors

$$|x^a| = |x^{iv}| |x^u| = |\exp(i(v \log x))| |x^u| = x^u.$$

Par conséquent on a, pour tout  $x > 1$ ,

$$\left| \frac{1}{1+x^a} \right| \leq \frac{1}{x^u - 1}$$

ce qui implique la convergence de l'intégrale  $J(a)$ . Montrons que l'application  $a \mapsto J(a)$  est holomorphe dans  $\Omega = \{\operatorname{Re} a > 1\}$ . Pour ce faire on utilise des critères d'holomorphie des intégrales avec paramètres (voir le chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol). Considérons d'abord  $J_1(a) = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^a}$ . On a (1)  $(a, x) \mapsto g(a, x) = \frac{1}{1+x^a}$  est continue. (2)  $\forall x \in [0, 2]$ :  $a \mapsto g(a, x)$  est holomorphe dans  $\Omega$ . Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (théorème 26 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol)  $a \mapsto J_1(a)$  est holomorphe dans  $\Omega$ . Pour  $J_2(a) = \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^a}$  il faut en plus de (1) et (2) majorer  $g(a, x) = \frac{1}{1+x^a}$  par une fonction intégrable  $k$  (dépendant que de la variable  $x$ ). Pour ce faire il faut travailler dans un domaine plus petit

$$\Omega_T = \{\operatorname{Re} a > T\} \subset \Omega, \quad T > 1.$$

Dans ce cas

$$|g(a, x)| = \left| \frac{1}{1+x^a} \right| \leq \frac{1}{x^T - 1} \quad \forall x \geq 2 \text{ et } a \in \Omega_T.$$

Comme  $T > 1$ ,  $k(x) = \frac{1}{x^T - 1}$  est intégrable:  $\int_2^\infty k(x) dx < \infty$ . Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (ici le théorème 27 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol),  $a \in \Omega_T \mapsto J_2(a)$  est holomorphe. Ceci étant vrai pour tout  $T > 1$ ,  $J_2$  est holomorphe dans  $\Omega$ . En conclusion,

$$a \mapsto J(a) = J_1(a) + J_2(a)$$

est holomorphe sur  $\Omega$ . L'affirmation  $J(a) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{a})}$ ,  $a \in \Omega$ , est une conséquence du principe des zéros isolés et du fait que nous avons déjà établi cette relation pour tout réel  $a > 1$ .

4. Évident.

5. On peut procéder comme dans la question 3. Notons que

$$|h(p, t)| = \left| \frac{e^{pt}}{1+e^t} \right| = \frac{e^{\operatorname{Re}(p)t}}{1+e^t}.$$

Par conséquent,  $|h(p, t)| \sim e^{(\operatorname{Re}(p)-1)t}$  pour  $t \rightarrow \infty$  et  $|h(p, t)| \sim e^{\operatorname{Re}(p)t}$  pour  $t \rightarrow -\infty$ . L'intégrale  $K(p)$  est donc convergente. Pour établir l'holomorphie de cette fonction il faut travailler u@i

$$U_\varepsilon = \{0 < \operatorname{Re}(p) < 1 - \varepsilon\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0 \text{ petit.}$$

6. Nous avons vu dans la question précédente que la fonction  $h(p, t) = \frac{e^{pt}}{1+e^t}$  décroît exponentiellement pour  $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ . On en déduit "facilement" (faire les détails!) que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = 0$$

Par le théorème des résidus il en résulte que :

$$2i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz \right].$$

Or  $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = -e^{2i\pi p} \int_{-R}^R \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ . D'où :

$$2i\pi (-e^{i\pi p}) = 2i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi \right) = (1 - e^{2i\pi p}) K(p).$$

Finalement on a

$$K(p) = \pi \frac{2i}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

---

$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61} + 3)| = |z^{61} + 3| \geq 2$  pour  $|z| = 1$ . D'où

$$|P(z) - Q(z)| = 1 < |Q(z)| \quad \text{dans} \quad \{|z| = 1\}.$$

Par le théorème de Rouché,  $P, Q$  ont le même nombre de zéros dans  $D(0, 1)$ . Le reste en découle en observant que  $P' = Q'$  et  $P(0) \neq 0$ .

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

L'application  $\Phi(z) = \frac{3z+5}{z+2}$  est une homographie. L'image d'un cercle est alors de nouveau un cercle ou une droite. De plus on remarque que (1)  $\Phi(x) \in \mathbb{R}$  pour tout réel  $x \neq -2$ . (2)  $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$  pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ . Comme  $\Phi(-1) = 2$  et  $\Phi(1) = \frac{8}{3}$ , l'image du cercle unité est un cercle symétrique par rapport à l'axe réel (cf. (2)) avec centre  $(\frac{8}{3} + 2)\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$  et de rayon  $\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$ . Le cercle de rayon 2 centré à l'origine contient  $-2$ . C'est l'unique point dont l'image est  $\Phi(-2) = \infty$ . L'image de ce cercle est alors une droite et c'est

$$\Phi(2) + i\mathbb{R} = \frac{11}{4} + i\mathbb{R}.$$

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

---

On a  $\Phi_\alpha(0) = \alpha$  et  $\Phi_\alpha(\alpha) = 0$ . Remarquons que  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$  fixe l'origine. Par l'exercice 7, l'automorphisme  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$  de  $D(0, 1)$  est une rotation  $z \mapsto e^{i\alpha}z$ . Un calcul explicite montre que  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \text{Id}$ , c'est à dire  $\Phi_\alpha^{-1} = \Phi_\alpha$ . Soit  $\Psi$  un automorphisme du disque unité  $D(0, 1)$  tel que  $\Psi(z_1) = z_2$ . Alors

$$\Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = \Phi_{z_2}(0) \iff \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = 0$$

et donc  $A = \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}$  est un automorphisme du disque unité fixant l'origine. On en déduit de nouveau que  $A$  est une rotation:  $A(z) = e^{i\alpha}z$ . Par conséquent,

$$\Psi = \Phi_{z_2} \circ A \circ \Phi_{z_1}^{-1}. \tag{1}$$

On vient de déterminer la forme générale d'un automorphisme  $\Psi$  du disque unité vérifiant  $\Psi(z_1) = z_2$ . Remarquons qu'il est unique "à une rotation près";  $\Psi$  est déterminé par (1) où  $A$  est une rotation quelconque.

---