Exercices : Jean-François Burnol
Corrections : Volker Mayer
Relecture : François Lescure

Divers

1 Un problème

Exercice 1

1. Prouver pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$
en utilisant le secteur angulaire $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2\pi}{n}$, $0 \leqslant |z| \leqslant R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.
2. Montrer, en utilisant les contours $\varepsilon \leqslant x \leqslant R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geqslant r \geqslant \varepsilon)$, $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geqslant \theta \geqslant 0)$:
$$a \in \mathbb{R},\ a > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}\ .$$
Pour définir z^a comme fonction holomorphe sur $\{z = re^{i\alpha}\,|\,0 < r < \infty,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{a}\}$, on pose $z^a = r^a e^{a i\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (car $\log r + i\alpha = \operatorname{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + i\frac{\pi}{a}$; no comments).
3. Soit $J(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a}$; justifier que l'intégrale définissant $J(a)$ est convergente et analytique comme fonction de a pour $\operatorname{Re}(a) > 1$ et prouver $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$.
4. On définit maintenant
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\,dt$$
pour $0 < p < 1$. Justifier les identités (pour $0 < p < 1$) :
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p}J\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$
5. Expliquer pourquoi l'intégrale $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\,dt$ est convergente et analytique pour p complexe avec $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ et établir la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$.
6. Donner une preuve simple directe de la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour tout p complexe avec $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ et $z = x + 2\pi i$, $x \in \mathbb{R}$.
7. Déduire de ce qui précède avec $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\operatorname{ch}(t/2)}\,dt = \frac{2\pi}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}\ ,$$
Montrer que la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\,dx$ appliquée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi x)}$ donne simplement $\widehat{f} = f$ (remarque : c'est aussi le cas avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$).
8. On revient à la formule générale $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. En séparant parties réelles et imaginaires dans $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\,dt$ déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t}\,dt \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t}\,dt\ ,$$
pour $0 < u < 1$, $v \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [002879]

2 Divers

Exercice 2

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\,dx.$ [002880]

Exercice 3

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx.$ [002881]

Exercice 4

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx.$ [002882]

Exercice 5

Montrer que les racines du polynôme $P(z)=z^{111}+3z^{50}+1$ vérifiant $|z|<1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. *Indication :* utiliser le théorème de Rouché en écrivant $P(z)=3z^{50}+(z^{111}+1)$ et calculer P' pour s'assurer que les racines avec $|z|<1$ sont simples.

Correction ▼ [002883]

Exercice 6

Déterminer l'image par $z\mapsto \frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine ; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x=y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2.

Correction ▼ [002884]

Exercice 7

Question de cours : quels sont les automorphismes de $D(0,1)$ avec 0 comme point fixe ? [002885]

Exercice 8

Soit α avec $|\alpha|<1$. On sait que $z\mapsto \phi_\alpha(z)=\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ est un automorphisme du disque unité $D(0,1)$. Trouver z_1 et z_2 avec $\phi_\alpha(z_1)=z_2$, $\phi_\alpha(z_2)=z_1$. Deux points distincts arbitraires z_1 et z_2 étant donnés dans $D(0,1)$, montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique à une rotation près (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

Correction ▼ [002886]

Exercice 9

Trouver l'unique automorphisme du premier quadrant qui échange $1+i$ et $2+2i$. On remarquera que $z\mapsto z^2$ est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur, et que l'on peut donc ramener le problème à une question dans le demi-plan supérieur. [002887]

Exercice 10

Soit f holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $|f(w)|\leqslant 8$ pour tout $|w|\leqslant 1$ et $f(\frac{3}{4})=0$. Montrer $|f(0)|\leqslant 6$. *Indication :* trouver un automorphisme ϕ du disque avec $\phi(0)=\frac{3}{4}$ et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction $\frac{1}{8}f(\phi(z))$. Trouver le z avec $\phi(z)=0$. [002888]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $C_R = \{Re^{i\theta}\,;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\}$. La fonction
$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$
a un seul pôle $z_0 = e^{i\pi/n}$ dans le secteur. C'est un pôle simple et le résidu est
$$\operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{z_0}{n} = -\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.$$
D'où
$$-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{Re^{i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n}$$
pour tout $R > 1$. Puisque $n > 1$, on a :
$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leqslant \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{R^n - 1} \int_{C_R} |dz| \right) = 0.$$
D'autre part,
$$\int_{Re^{2i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n} = -\int_0^R \frac{1}{1+x^n} e^{2i\pi/n} dx = -e^{2i\pi/n} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}.$$
Il en résulte que
$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} = \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} - \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n}}{1-e^{2i\pi/n}} \longrightarrow \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}} = \frac{2i\pi}{n}\frac{1}{2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$
lorsque $R \to \infty$.

2. La fonction $z^a = \exp\left(a(\log r + i\alpha)\right)$ n'est pas définie au voisinage de l'origine. C'est la raison pourquoi on est amené de considérer le petit morceau de cercle $\gamma_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta}\,;\ \frac{2\pi}{a} \geqslant \theta \geqslant 0\}$. On va de nouveau noter $C_R = \{Re^{i\theta}\,;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\}$ et
$$\Omega = \left\{ z = re^{i\alpha}\,;\ 0 < r < \infty\ ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{a} \right\}.$$
Pour $z = re^{i\alpha} \in \Omega$ on a
$$\begin{aligned} & z^a = -1 \\ \Longleftrightarrow\quad & a(\log r + i\alpha) = i\pi\ (\mathrm{mod} 2i\pi) \\ \Longleftrightarrow\quad & r = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$
Par conséquent, $f(z) = \frac{1}{1+z^a}$ a une seule singularité $z_0 = e^{i\frac{\pi}{a}}$ dans Ω. Comme $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ avec $h(z_0) = 1 + z_0^a = 0$ et
$$h'(z_0) = \left(\exp(a\log z)\right)'_{|z=z_0} = \frac{a}{z_0}z_0^a \neq 0$$
le point z_0 est un pôle simple et on a
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{h'(z_0)} = -\frac{z_0}{a} = -\frac{1}{a}e^{i\frac{\pi}{a}}.$$
Il suffit alors de procéder comme dans la question 1. pour établir
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)} \quad \text{pour} \quad a > 1\,.$$

3. Soit $x \in (0,\infty)$ et $a = u + iv$ avec $u > 1$. Alors
$$|x^a| = |x^{iv}||x^u| = |\exp(i(v\log x))|x^u = x^u.$$
Par conséquent on a, pour tout $x > 1$,
$$\left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{1}{x^u - 1}$$
ce qui implique la convergence de l'intégrale $J(a)$. Montrons que l'application $a \mapsto J(a)$ est holomorphe dans $\Omega = \{\mathrm{Re}\, a > 1\}$. Pour ce faire on utilise des critères d'holomorphie des intégrales avec paramètres (voir le chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol). Considérons d'abord $J_1(a) = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^a}$. On a (1) $(a,x) \mapsto g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ est continue. (2) $\forall x \in [0,2]$: $a \mapsto g(a,x)$ est holomorphe dans Ω. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (théorème 26 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol) $a \mapsto J_1(a)$ est holomorphe dans Ω. Pour $J_2(a) = \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^a}$ il faut en plus de (1) et (2) majorer $g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ par une fonction intégrable k (dépendant que de la variable x). Pour ce faire il faut travailler dans un domaine plus petit
$$\Omega_T = \{\mathrm{Re}\, a > T\} \subset \Omega \quad , \quad T > 1\,.$$
Dans ce cas
$$|g(a,x)| = \left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{1}{x^T - 1} \quad \forall x \geqslant 2 \text{ et } a \in \Omega_T.$$
Comme $T > 1$, $k(x) = \frac{1}{x^T - 1}$ est intégrable : $\int_2^\infty k(x)\,dx < \infty$. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (ici le théorème 27 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol), $a \in \Omega_T \mapsto J_2(a)$ est holomorphe. Ceci étant vrai pour tout $T > 1$, J_2 est holomorphe dans Ω. En conclusion,
$$a \mapsto J(a) = J_1(a) + J_2(a)$$
est holomorphe sur Ω. L'affirmation $J(a) = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$, $a \in \Omega$, est une conséquence du principe des zéros isolés et du fait que nous avons déja établi cette relation pour tout réel $a > 1$.
4. Évident.
5. On peut procéder comme dans la question 3. Notons que
$$|h(p,t)| = \left|\frac{e^{pt}}{1+e^t}\right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(p)t}}{1+e^t}.$$
Par conséquent, $|h(p,t)| \sim e^{(\mathrm{Re}(p)-1)t}$ pour $t \to \infty$ et $|h(p,t)| \sim e^{\mathrm{Re}(p)t}$ pour $t \to -\infty$. L'intégrale $K(p)$ est donc convergente. Pour établir l'holomorphie de cette fonction il faut travailler u©ì
$$U_\varepsilon = \{0 < \mathrm{Re}(p) < 1 - \varepsilon\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0 \text{ petit}.$$
6. Nous avons vu dans la question précédente que la fonction $h(p,t) = \frac{e^{pt}}{1+e^t}$ décroit exponentiellement pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ lorsque $t \to \pm\infty$. On en déduit "facilement" (faire les détails !) que
$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = 0$$
Par le théorème des résidus il en résulte que :
$$2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz\right].$$
Or $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = -e^{2i\pi p}\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$. D'où :
$$2i\pi\left(-e^{i\pi p}\right) = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \left(1 - e^{2i\pi p}\right)K(p).$$
Finalement on a
$$K(p) = \pi\frac{2i}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61}+3)| = |z^{61}+3| \geqslant 2$ pour $|z| = 1$. D'où

$$|P(z) - Q(z)| = 1 < |Q(z)| \quad \text{dans} \quad \{|z| = 1\}.$$

Par le théorème de Rouché, P, Q ont le même nombre de zéros dans $D(0,1)$. Le reste en découle en observant que $P' = Q'$ et $P(0) \neq 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

L'application $\Phi(z) = \frac{3z+5}{z+2}$ est une homographie. L'image d'un cercle est alors de nouveau un cercle ou une droite. De plus on remarque que (1) $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel $x \neq -2$. (2) $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Comme $\Phi(-1) = 2$ et $\Phi(1) = \frac{8}{3}$, l'image du cercle unité est un cercle symétrique par rapport à l'axe réel (cf. (2)) avec centre $\left(\frac{8}{3}+2\right)\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ et de rayon $\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$. Le cercle de rayon 2 centré à l'origine contient -2. C'est l'unique point dont l'image est $\Phi(-2) = \infty$. L'image de ce cercle est alors une droite et c'est

$$\Phi(2) + i\mathbb{R} = \frac{11}{4} + i\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

On a $\Phi_\alpha(0) = \alpha$ et $\Phi_\alpha(\alpha) = 0$. Remarquons que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ fixe l'origine. Par l'exercice 7, l'automorphisme $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ de $D(0,1)$ est une rotation $z \mapsto e^{i\alpha}z$. Un calcul explicite montre que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \mathrm{Id}$, c'est à dire $\Phi_\alpha^{-1} = \Phi_\alpha$. Soit Ψ un automorphisme du disque unité $D(0,1)$ tel que $\Psi(z_1) = z_2$. Alors

$$\Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = \Phi_{z_2}(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = 0$$

et donc $A = \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}$ est un automorphisme du disque unité fixant l'origine. On en déduit de nouveau que A est une rotation : $A(z) = e^{i\alpha}z$. Par conséquent,

$$\Psi = \Phi_{z_2} \circ A \circ \Phi_{z_1}^{-1}. \tag{1}$$

On vient de déterminer la forme générale d'un automorphisme Ψ du disque unité vérifiant $\Psi(z_1) = z_2$. Remarquons qu'il est unique "à une rotation près"; Ψ est déterminé par (1) où A est une rotation quelconque.