



## Jusqu'à l'infini

---

### 1 Divers

#### Exercice 1

---

Montrer qu'il existe une (unique) fonction analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  qui vaut  $\sqrt{a^2 - 1}$  pour  $a > 1$ . *Indication* : montrer pour commencer que la formule  $f(a) = \exp(\frac{1}{2}\text{Log}(a-1) + \frac{1}{2}\text{Log}(a+1))$  donne une solution sur l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 1]$ . Puis montrer que  $g(a) = -\exp(\frac{1}{2}\text{Log}(-a-1) + \frac{1}{2}\text{Log}(-a+1)) = -f(-a)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, +\infty[$ . Enfin montrer que  $g(a) = f(a)$  dans le demi-plan supérieur et aussi dans le demi-plan inférieur en calculant  $f(\pm i)$  et donc  $g(\pm i)$  et en expliquant pourquoi a priori le quotient  $g(a)/f(a)$  est constant dans ces deux demi-plans.

[002851]

#### Exercice 2

---

1. On considère la fonction analytique  $\phi(a) = \text{Log}(a-1) - \text{Log}(a+1)$  dans le demi-plan supérieur et la fonction analytique  $\psi(a) = \text{Log}(a-1) - \text{Log}(a+1)$  dans le demi-plan inférieur. Montrer que  $\phi$  et  $\psi$  sont la restriction à leurs demi-plans respectifs d'une fonction analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ . *Indication* : il y a plusieurs raisonnements possibles et plusieurs indications possibles. Donc, débrouillez vous.
2. On considère la fonction  $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$ . Quelle est l'image par cette fonction de l'intervalle  $] -1, 1[$ ? Quelle est l'image par cette fonction de  $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ ? En déduire que la fonction composée  $\Phi(a) = \text{Log} \frac{a-1}{a+1}$  existe et est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ . Retrouver le résultat de la question précédente (et montrer que  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\Phi$  coïncident dans les intersections deux-à-deux de leurs ouverts de définitions).
3. Quel est le développement en série de Laurent de la fonction analytique  $\Phi$  dans la couronne  $1 < |a| < \infty$ ? Que vaut par exemple  $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$ ?

[002852]

#### Exercice 3

---

Prouver pour  $a > 1$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{a + \sin \theta} d\theta = \frac{\sqrt{a^2 - 1} - a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

En utilisant l'un des exercices précédents montrer que la formule a un sens et est valable pour  $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ .

[Correction ▼](#)

[002853]

#### Exercice 4

---

Que vaut en fonction de  $R > 0$

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^2 - 4z + 4} dz ?$$

[002854]

#### Exercice 5

---

Soit  $P(z) = Az^4 + \dots$  un polynôme de degré au plus 4. Montrer que  $\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5-1} dz$  est indépendant de  $R$  pour  $R > 1$ . En faisant tendre  $R$  vers l'infini en déduire que cette valeur constante est  $2\pi i A$ . Prouver alors via le théorème des résidus :  $A = \frac{1}{5} \sum_{w^5=1} wP(w)$ . [002855]

### Exercice 6 Résidu à l'infini

Soit  $f$  une fonction analytique pour  $\{|z| > R\}$ . On pose :

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

avec  $C_r$  le cercle  $\{|z| = r\}$  parcouru dans le sens direct. Montrer que le terme de droite est bien indépendant de  $r > R$ . On notera le signe  $-$ . On dit que  $\text{Res}(f, \infty)$  est le "résidu à l'infini" de  $f$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées. Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus (y compris celui à l'infini) de  $f$  est nulle*. [002856]

### Exercice 7

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ , avec  $\Omega$  le domaine intérieur à une courbe de Jordan  $\gamma$ . Soit  $g_n(z)$  la partie principale (partie singulière) de  $f$  en la singularité isolée  $z_n$ . Prouver *la formule intégrale générale de Cauchy* :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \quad f(z) = \sum_{1 \leq n \leq N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Pour cela, remarquer d'abord  $\text{Res}\left(\frac{f(w)}{w-z}, z_n\right) = \text{Res}\left(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n\right)$ ; puis montrer que le résidu à l'infini de la fonction  $\frac{g_n(w)}{w-z}$  de  $w \in \mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ , est nul. On pourra utiliser l'exercice 6.

[Correction ▼](#)

[002857]

## 2 Contours infinis

### Exercice 8 Morceaux de Résidus

Soit  $f$  présentant en  $z_0$  un pôle simple. Soit  $C_r(\alpha, \beta)$  l'arc de cercle  $w = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , parcouru dans le sens direct des  $\theta$  et avec  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ . Prouver :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r(\alpha, \beta)} f(z) dz = 2\pi i \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \text{Res}(f, z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

[Correction ▼](#)

[002858]

### Exercice 9 Lemme de Jordan

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur le domaine  $\{\text{Im}(z) > 0, |z| > R\}$ , ou seulement sur une suite de demi-cercles  $\{\text{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$  de rayons tendant vers l'infini. On suppose  $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) > 0}} |f(z)| = 0$  (ou

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\text{Im}(z) > 0, |z|=R_n} |f(z)| = 0$ .) Montrer (on utilisera  $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \theta$  pour  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{z=Re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi} f(z) e^{iz} dz = 0 \quad (\text{ou l'analogie avec les } R_n)$$

[Correction ▼](#)

[002859]

### Exercice 10

En considérant l'intégrale de  $\frac{e^{iz}}{z}$  sur un contour allant de  $-R$  à  $+R$  le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de  $+R$  à  $-R$  par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

Correction ▼

[002860]

### Exercice 11

Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$  et  $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$  en considérant l'intégrale de  $\exp(-z^2)$  sur le contour  $z = x$ ,  $0 \leq x \leq R$ ,  $z = R \exp(i\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $R \geq x \geq 0$ . On rappelle l'identité  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2) du = 1$ .

Correction ▼

[002861]

### Exercice 12

Que vaut  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ ? (faire un changement de variable  $t = \pi u^2$  pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$  et  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel.

[002862]

### Exercice 13

Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour  $0 < a < 1$  les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes).

[002863]

### Exercice 14

Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue ( $\arctan \dots$  !):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment  $[-R, +R]$  et le semi-cercle de rayon  $R$  dans le demi-plan supérieur, pour  $R \rightarrow +\infty$ .

[002864]

### Exercice 15

Justifier  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$  pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|}.$$

Suivant le cas  $\xi \geq 0$  ou  $\xi < 0$  on complètera le segment  $[-R, +R]$  par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour  $R \rightarrow \infty$ . On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de  $\xi$  et que l'on peut donc se restreindre à  $\xi \geq 0$ .

[002865]

### Exercice 16

Prouver, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il suffit d'évaluer séparément  $\int_{-\infty}^0$  et  $\int_0^{\infty}$  en utilisant le fait que  $\exp$  est sa propre primitive (ce calcul n'utilise donc pas la notion de fonction analytique et le théorème des résidus). On remarquera que l'on retombe sur la fonction  $1/(1+x^2)$ , ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour les transformations intégrales de Fourier). [002866]

### Exercice 17

Déterminer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx$$

[002867]

### Exercice 18

Préciser pourquoi  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$  est une intégrale convergente pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , est une fonction réelle et paire de  $\xi$ , et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour  $\xi \geq 0$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Cette formule est-elle valable pour  $\xi < 0$ ?

[002868]

### Exercice 19

1. Déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à  $R$  puis de  $R$  à  $jR$  le long d'un cercle puis de  $jR$  à 0 par un segment ( $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$ ). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.

2. On note, pour  $|w| = 1$  et certaines valeurs spéciales de  $w$  (que l'on précisera) étant exclues,  $J(w)$  l'intégrale  $\int \frac{dz}{1+z^3}$  le long du segment infini  $w\mathbb{R}^+$ . Déterminer  $J(w)$  en fonction de  $w$ .

[002869]

## 3 Développement de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ et produit infini d'Euler

### Exercice 20

Le but de ce problème est d'établir les deux formules importantes :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ M \rightarrow +\infty}} \sum_{\substack{-M \leq n \leq N \\ n \neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sin(\pi z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi z \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

1. Montrer la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$  (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).
2. On pose  $f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$ . Soit  $z \notin \mathbb{Z}$  fixé, soit  $N > |z| - \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{R}_N$  le carré  $\{|x| \leq N + \frac{1}{2}, |y| \leq N + \frac{1}{2}\}$ , et  $C_N = \partial \mathcal{R}_N$  son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw$  à l'aide du Théorème des résidus.
3. Montrer  $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w} dw = 0$  (on notera que  $f$  est impaire) et en déduire :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw$$

4. On rappelle l'identité  $\sin(w) = \sin(x) \operatorname{ch}(y) + i \cos(x) \operatorname{sh}(y)$  pour  $w = x + iy$ . Montrer  $|\sin w|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$  ( $x, y \in \mathbb{R} \dots$ ). En déduire  $|\sin(\pi w)| = \operatorname{ch}(\pi y) \geq 1$  sur les bords verticaux du carré et  $|\sin(\pi w)| \geq \operatorname{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geq \operatorname{sh}(\pi \frac{1}{2}) = 2.301 \dots \geq 1$  sur les bords horizontaux. Conclure la preuve de

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

avec convergence uniforme pour  $|z|$  borné.

5. Reprendre la même technique et prouver :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N \leq n \leq N} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

avec convergence uniforme pour  $|z|$  borné.

6. On veut maintenant prouver :  $\sin(\pi z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi z \prod_{n=1}^N (1 - \frac{z^2}{n^2})$  On fixe une fois pour toutes  $R > 0$ , et on va montrer la formule pour  $|z| < R$ . Soit  $N$  avec  $N > R$  et notons  $f_N(z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{n=1}^N (1 - \frac{z^2}{n^2})$ , prolongé par continuité en les  $n$ ,  $|n| \leq N$ . Montrer que  $f_N$  est holomorphe et ne s'annule pas sur  $D(0, R)$ .
7. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  le chemin  $\gamma(t) = f_N(tz)$ . On a donc  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(1) = f_N(z)$ , et  $\gamma(t) \neq 0$  pour tout  $t$ . Par un théorème démontré en cours (lequel?) on a  $\gamma(1) = \gamma(0) \exp\left(\int_{\gamma} \frac{dw}{w}\right)$ . En déduire  $f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f'_N(tz)}{f_N(tz)} z dt\right)$ .
8. Soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la convergence uniforme pour  $|z|$  borné du développement en fractions de  $\pi(\pi z)$ , montrer que pour  $N$  suffisamment grand, on a  $|f'_N(w)| \leq \varepsilon |f_N(w)|$  pour tout  $w \in D(0, R)$ , puis en déduire

$$N \gg 0 \quad |z| < R \implies |f_N(z)| \leq e^{\varepsilon|z|} \leq e^{\varepsilon R}$$

9. En déduire  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = 1$ , uniformément sur  $D(0, R)$ . Conclure la preuve du produit infini de Euler pour  $\sin(z)$ .

[002870]

## 4 Produits infinis

Au cas où je ne l'aurais pas rédigé dans le polycopié, j'explique ce qu'il y a à savoir : on écrit  $L = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$  si  $L = \lim_{N \rightarrow \infty} q_1 q_2 \dots q_N$ . Supposons tous les  $q_n$  non nuls. On dira que le "produit infini converge" si, non seulement  $L$  existe, mais si de plus  $L \neq 0$ . On démontre (ce n'est pas évident avec des  $q_n$  complexes, ou négatifs, et je vous conseille fortement d'y réfléchir) que c'est le cas si et seulement si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} q_n$  est convergente (par convention  $\operatorname{Log}(-1) = +i\pi$ ). Lorsque certains des  $q_n$  sont nuls, on dit que le produit converge si il existe  $N$  avec  $q_n \neq 0$  pour  $n \geq N$  et si  $\prod_{n=N}^{\infty} q_n$  converge. Lorsque le produit converge on a nécessairement (pourquoi?)  $\lim q_n = 1$  (c'est nécessaire, pas suffisant). Nous travaillerons principalement avec des produits "absolument convergents".

### Exercice 21 Produit absolument convergent

Soit  $u_n, n \geq 1$  des nombres complexes. Montrer :  $1 + \sum_{n=1}^N |u_n| \leq \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|) \leq e^{\sum_{n=1}^N |u_n|}$ . En déduire que la suite croissante  $\prod_{n=1}^N (1 + |u_n|)$  a une limite finie si et seulement si  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$ . On suppose maintenant être dans ce cas, et de plus  $\forall n, 1 + u_n \neq 0$ . Montrer alors  $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + u_n)| < \infty$ , et en déduire que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  converge. On conviendra donc de dire que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  est "absolument convergent" si  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$ , et on vient donc de prouver qu'un produit absolument convergent est convergent. C'est principalement, la seule chose que vous ayez à savoir sur ce sujet.

[002871]

### Exercice 22

Pour quelles valeurs de  $p$  (réel)  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + k^{-p})$  converge ?

[002872]

---

**Exercice 23**

---

Étant admis que  $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ , prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit.

[002873]

---

**Exercice 24**

---

Étant admis  $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ , prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=-N, k \neq 0}^{+N} \frac{z-k}{-k},$$

puis établir pour tout  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  :

$$\sin(\pi(z - \alpha)) = -\sin(\pi\alpha) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=-N}^{+N} \left(1 - \frac{z}{\alpha + k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit  $-N$  par  $-N \pm 1$  ou  $+N$  par  $+N \pm 1$ . En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2} + k\right)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent.

[002874]

---

**Exercice 25**

---

On rappelle la formule  $\pi(\pi\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{\alpha - k}$ , pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha - z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi(\pi\alpha)z} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha + k}\right) e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent.

[002875]

---

**Exercice 26**

---

Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$
$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de  $\sin z$ .

[002876]

---

**Exercice 27**

---

On suppose  $\sum_{n \geq 1} |u_n|^2 < \infty$ . Montrer que les deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum \text{Log}(1 + u_n)$  sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes (on suppose  $\forall n, u_n \neq -1$ ). Donc si  $\sum_{n \geq 1} |u_n|^2 < \infty$  le produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$  est convergent si et seulement si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

[002877]

---

**Exercice 28**

---

Montrer que  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{i}{k})$  diverge tandis que  $\prod_{k=1}^{\infty} |1 + \frac{i}{k}|$  converge.

---

[002878]

### Correction de l'exercice 3 ▲

Si  $z = e^{i\theta}$ , alors  $\sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  et  $dz = ie^{i\theta} d\theta$ . D'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{a + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{z - \bar{z}}{2ia + z - \bar{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2iaz - 1} \frac{dz}{z}.$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème des résidus.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Rappelons la formule de Cauchy pour  $f$  holomorphe sur  $\bar{\Omega}$  (donc sans singularités) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Il s'agit ici d'obtenir une version généralisée pour des fonctions  $f$  ayant des singularités  $z_1, \dots, z_N \in \Omega$ . Fixons  $z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$  et considérons  $G(w) = \frac{f(w)}{w - z}$ . Cette fonction a un pôle simple en  $w = z$  et :

$$\text{Res}(G, z) = \lim_{w \rightarrow z} (w - z)G(w) = f(z).$$

Les autres singularités de  $G$  dans  $\Omega$  sont  $z_1, \dots, z_N$ . Par définition, le résidu de  $G$  en  $z_j$  est le « coefficient  $a_{-1}$  » de la série de Laurent de  $G$  en  $z_j$ . Or

$$G(w) = \frac{1}{w - z} f(w) = \sum_{k \geq 0} b_k (w - z_j)^k \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (w - z_j)^l$$

puisque  $w \mapsto \frac{1}{w - z}$  est holomorphe au voisinage de  $z_j$  (et bien sûr on peut calculer les  $b_k$ , mais ce n'est pas utile). On remarque que pour calculer  $a_{-1}$  interviennent seulement les indices  $(k, l)$  qui vérifient  $k + l = -1$ . Comme  $k \geq 0$  on a  $l = -1 - k < 0$ . D'où :

$$\text{Res}(G, z_j) = \text{Res} \left( \frac{g_j(w)}{w - z}, z_j \right).$$

On peut maintenant utiliser l'exercice 6 ou alors conclure directement : si  $R_0 = 2 \max\{|z|, |z_j|\}$ , alors pour tout  $R > R_0$ ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=R} \frac{g_j(w)}{w - z} dw = \sum_{\xi \in \{z, z_j\}} \text{Res} \left( \frac{g_j(w)}{w - z}, \xi \right).$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_{|w|=R} \frac{g_j(w)}{w - z} dw$  ne dépend pas de  $R > R_0$ . Or, il existe  $C > 0$  tel que

$$\left| \frac{g_j(w)}{w - z} \right| \leq \frac{C}{|w|^2}, \quad |w| > R_0,$$

ce qui entraîne

$$\left| \int_{|w|=R_0} \frac{g_j(w)}{w - z} dw \right| \leq \lim_{|w|=R} \int_{|w|=R_0} \frac{C}{|w|^2} |dw| = 0.$$

D'où

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=R_0} \frac{g_j(w)}{w - z} dw = \text{Res} \left( \frac{g_j(w)}{w - z}, z_j \right) + g_j(z).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des résidus à  $G$  pour conclure :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} G(w) dw = f(z) - g_1(z) - \dots - g_N(z).$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

Dans le calcul des intégrales on est souvent confronté à des passages à la limite (du genre  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz$  ou  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz$  dans le cas où 0 est une singularité que l'on contourne,  $C_R$  un morceau de cercle comme



dans les exercices ici). Cet exercice et le suivant donnent des outils très pratiques pour ce genre de calculs. Si  $f$  a  $z_0$  comme pôle simple, sa série de Laurent en  $z_0$  est de la forme

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots = \sum_{k \geq -1} a_k (z - z_0)^k.$$

Par convergence normale de cette série

$$\begin{aligned} \int_{C_r(\alpha, \beta)} f(z) dz &= \sum_{k \geq -1} a_k \int_{C_r(\alpha, \beta)} (z - z_0)^k dz = \sum_{k \geq -1} a_k \int_{\alpha}^{\beta} (re^{i\theta})^k i r e^{i\theta} d\theta \\ &= ia_{-1}(\beta - \alpha) + r \sum_{k \geq 0} \left( r^k a_k \frac{e^{i(k+1)\beta} - e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'énoncé de l'exercice en observant que  $\left| \frac{e^{i(k+1)\beta} - e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)} \right| \leq \frac{2}{k+1}$  et en faisant tendre  $r \rightarrow 0$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Pour  $\varepsilon > 0$  il existe  $R > 0$  tel que  $|f(z)| \leq \varepsilon$  pour tout  $|z| \geq R$ ,  $\text{Im} z \geq 0$ . Si  $C_R$  est le demi-cercle supérieur orienté alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i(Re^{i\theta})} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \varepsilon \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} R d\theta \\ &= 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R \frac{\theta}{2}} d\theta = 4\varepsilon (1 - e^{-R \frac{\pi}{4}}) \leq 8\varepsilon. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Utiliser les exercices 8 et 9.

### Correction de l'exercice 11 ▲

Par holomorphie de  $z \mapsto e^{-z^2}$ ,

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{C_R} e^{-z^2} dz + \int_{Re^{i\pi/4}}^0 e^{-z^2} dz = 0.$$

Notons  $I_{1,R}$  la première intégrale ci-dessus,  $I_{2,R}$  la deuxième et  $I_{3,R}$  la troisième. Alors,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{1,R} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2} \sqrt{\pi} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme  $e^{-z^2} = e^{-(e^{i\pi/4}t)^2} = e^{-it^2} = \cos(t^2) - i \sin(t^2)$  pour  $z = e^{i\pi/4}t$  on a

$$\begin{aligned} I_{3,R} &= - \int_0^R (\cos(t^2) - i \sin(t^2)) e^{i\pi/4} dt \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \int_0^R \cos(t^2) + \sin(t^2) dt + i \int_0^R \cos(t^2) - \sin(t^2) dt \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de déterminer  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{2,R}$  pour en déduire les intégrales de Fresnel. Si on pose  $z = Re^{i\theta}$ , alors

$$\int_{C_R} e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta$$

ce qui implique

$$|I_{2,R}| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos(\alpha)} d\alpha.$$

Du changement de variables  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  et du fait que  $\sin \beta \geq \frac{\beta}{2}$  pour  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  on déduit que :

$$|I_{2,R}| \leq -\frac{R}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2 \sin(\beta)} d\beta \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{R}{2} e^{-R^2 \frac{\beta}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{2}{R} \rightarrow 0$$

lorsque  $R \rightarrow \infty$ . Conclusion  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ .

---