Exercices : Jean-François Burnol
Corrections : Volker Mayer
Relecture : François Lescure

Dérivabilité au sens complexe, fonctions analytiques

1 Dérivabilité complexe

Exercice 1

Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction ▼ [002783]

Exercice 2

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 ; montrer que $f+g$, $f-g$ et fg le sont et donner la valeur de leurs dérivées au point z_0.

Correction ▼ [002784]

Exercice 3

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 montrer que $\frac{f}{g}$ est dérivable au sens complexe et donner la valeur de la dérivée lorsque $g(z_0) \neq 0$.

Correction ▼ [002785]

Exercice 4

Montrer la formule pour la dérivée d'une composition $g \circ f$.

Correction ▼ [002786]

Exercice 5

Soit f et g deux fonctions n-fois dérivables au sens complexe sur un ouvert non vide U (remarque : d'après le cours il suffit qu'elles soient dérivables une fois sur U pour qu'elles le soient un nombre quelconque de fois). Montrer la formule de Leibniz généralisée :

$$\forall z \in U \qquad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z)$$

Correction ▼ [002787]

Exercice 6

On se donne deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2 non nuls. En utilisant le théorème sur les séries doubles prouver $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ avec (formules dites de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est-il toujours égal à $\min(R_1, R_2)$ ou peut-il être plus grand ?

Correction ▼ [002788]

Exercice 7

Retrouver le résultat de l'exercice précédent (l'exercice 6) de manière plus indirecte en montrant que les coefficients $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ sont ceux de la série de Taylor à l'origine de la fonction holomorphe $k(z) = f(z)g(z)$.

Correction ▼ [002789]

Exercice 8

En quels points la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle dérivable au sens complexe, et/ou holomorphe ? Même question pour les fonctions $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$.

Correction ▼ [002790]

Exercice 9

Prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe, de dérivée identiquement nulle, est constante. Et si l'ouvert n'est pas connexe ?

Correction ▼ [002791]

Exercice 10

Sur un ouvert connexe U on se donne une fonction holomorphe f qui a la propriété de ne prendre que des valeurs réelles. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante.

Correction ▼ [002792]

---

2 La fonction exponentielle

Exercice 11

Cet exercice propose une variante pour développer la théorie de la fonction exponentielle.

1. On se donne une fonction f qui est $n+1$-fois dérivable au sens complexe sur le disque ouvert $D(0,R)$ (on sait qu'une fois suffit mais on ne va pas utiliser ce théorème difficile ici). Soit $z \in D(0,R)$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction de la variable réelle $t \mapsto g(t) = f(tz)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, prouver :

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tz)\, dt$$

2. On suppose que f est dérivable au sens complexe une fois sur $D(0,R)$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est infiniment dérivable au sens complexe. En utilisant la question précédente montrer :

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \big(\sup_{|w| \leqslant |z|} |f(w)| \big) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

3. Réciproquement on considère la fonction $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Vérifier que le rayon de convergence est infini. Établir par un calcul direct que $F'(0)$ existe et vaut 1. En utilisant le théorème sur les séries doubles, montrer $F(z+w) = F(z)F(w)$. En déduire ensuite que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $F' = F$.

Correction ▼ [002793]

---

3 Fonctions analytiques

Exercice 12

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Est-il exact que pour $|z| > R$ on a $\lim |a_n z^n| = +\infty$?

Correction ▼ [002794]

Exercice 13

Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Correction ▼ [002795]

Exercice 14

Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

Correction ▼ [002796]

Exercice 15

Déterminer en tout $z_0 \neq 1,\ 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

Correction ▼ [002797]

Exercice 16

Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0. [002798]

Exercice 17

On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Quel est son rayon de convergence ? On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t\to 1} f(t)$? (on prend $0 < t < 1$; minorer f par ses sommes partielles). Plus généralement que vaut $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (ici encore t est pris dans $]0,1[$), lorsque w vérifie une équation $w^{2^N} = 1$? En déduire qu'il est impossible de trouver un ouvert U connexe intersectant $D(0,1)$ mais non inclus entièrement dans $D(0,1)$ et une fonction holomorphe $g(z)$ sur U tels que $g = f$ sur $U \cap D(0,1)$. Pour tout $z_0 \in D(0,1)$ déterminer alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point z_0.

Correction ▼ [002799]

Exercice 18

Montrer que le rayon de convergence de chacune des séries concernées est 1 et prouver :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour ce dernier cas on définit $S_0 = 1$, $S_1 = 1+z$, $S_2 = 1+z+z^2$, ...(on pose aussi $S_{-1} = 0$). En écrivant $z^n = S_n - S_{n-1}$ exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en fonction des S_n. Montrer que les S_n sont bornées lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$. Conclure. [002800]

Exercice 19

Montrer qu'un entier $k \geqslant 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2m+1)$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Puis prouver pour $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

On justifiera les interversions de séries. Prouver aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

[002801]

4 Trigonométrie complexe

Exercice 20

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$, $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules :
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi + z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi + z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Correction ▼ [002802]

Exercice 21

Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\,\mathrm{ch}(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b)$. Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :

$$a, b \in \mathbb{R} \implies \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b)$$

Déterminer alors les nombres complexes $z = a+ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

Correction ▼ [002803]

Exercice 22

Montrer :

$$a, b \in \mathbb{R} \implies \quad |\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \mathrm{sh}^2(b) = \mathrm{ch}^2(b) - \sin^2(a)$$

Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z) = 0$. [002804]

5 Fonctions de Bessel

Exercice 23

Les fonctions de Bessel sont très importantes en Analyse. Elles apparaissent très souvent dans des problèmes de physique mathématique. L'analyse complexe permet d'étudier de manière approfondie ces fonctions. Ici nous nous contentons des tout débuts de la théorie. Nous ne considérons que les fonctions [1] J_0, J_1, J_2, …, qui sont définies par les formules : [2]

$$\nu \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C} \qquad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

1. dites "fonctions de Bessel de première espèce (et d'indices entiers)".
2. Autrement dit :

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2.4.\ldots.(2\nu)} \left(1 - \frac{z^2}{2.(2\nu+2)} + \frac{z^4}{2.4.(2\nu+2).(2\nu+4)} - \frac{z^6}{2.4.6.(2\nu+2).(2\nu+4).(2\nu+6)} + \ldots\right)$$

Remarquez que seule la constante $2.4.\ldots.(2\nu) = 2^\nu \nu!$ nous restreint (pour le moment) à des valeurs entières de ν. Si on en fait abstraction on obtient avec $\nu = -\frac{1}{2}$ la fonction "multiforme" $z^{-1/2}\cos(z)$; tandis qu'avec $\nu = +\frac{1}{2}$ on obtient $z^{-1/2}\sin(z)$. Les définitions exactes sont $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$ et $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série définissant J_ν est $+\infty$.
2. En dérivant terme à terme prouver les formules :

$$\begin{aligned} (z^\nu J_\nu)' &= z^\nu J_{\nu-1} && (\nu \geqslant 1) \\ (z^{-\nu} J_\nu)' &= -z^{-\nu} J_{\nu+1} && (\nu \geqslant 0) \end{aligned}$$

   En particulier on a $(zJ_1)' = zJ_0$ et $J_0^{'} = -J_1$.
3. Réécrire les équations précédentes sous la forme $(z\frac{d}{dz}+\nu)J_\nu = zJ_{\nu-1}$ $(\nu \geqslant 1)$ et $(z\frac{d}{dz}-\nu)J_\nu = -zJ_{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 0)$ et en déduire $-(\frac{d}{dz}+\frac{\nu+1}{z})(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z})J_\nu = J_\nu$, puis, après simplification, l'équation différentielle de Bessel :
$$z^2 J_\nu'' + zJ_\nu' + (z^2-\nu^2)J_\nu = 0$$
4. Montrer, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, que la série entière définissant J_ν est la seule (à une constante multiplicative près) qui donne une solution de l'équation différentielle de Bessel. [3]

[002805]

---

3. les autres solutions de l'équation différentielle sont singulières en $z = 0$, avec une composante logarithmique ($\nu \in \mathbb{Z}$). Pour $\nu \notin \mathbb{Z}$ il y a une solution en $z^\nu(\sum_{k\geqslant 0} c_k z^k)$ et une autre en $z^{-\nu}(\sum_{k\geqslant 0} d_k z^k)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Il suffit de vérifier que f est dérivable au sens complexe. Pour tout $z \neq 0$:

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{z}}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{1}{w-z}\left(\frac{z-w}{wz}\right) = -\frac{1}{z^2}\,.$$

La fonction f est bien holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Considérons le produit fg. En utilisant la définition même de la dérivée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)\right) &= f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\ &\longrightarrow f(z)g'(z)+g(z)f'(z) \quad \text{lorsque } h\to 0\,.\end{aligned}$$

Autre manière :

$$\begin{aligned}f(z+h)g(z+h) &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))(g(z)+g'(z)h+h\varepsilon(h))\\ &= f(z)g(z)+(f(z)g'(z)+f'(z)g(z))h+h\varepsilon(h)\,.\end{aligned}$$

D'où $(fg)'(z) = f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

De la même façon que pour la correction de l'exercice 2 on a

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)}{g(z+h)} &= \frac{f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h)}{g(z)\left(1+\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)}\\ &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))\frac{1}{g(z)}\left(1-\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)\\ &= \frac{f(z)}{g(z)}+\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}h+h\varepsilon(h)\end{aligned}$$

si $g(z)\neq 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

On utilise de nouveau la définition de la dérivée, d'abord pour f en z puis pour g au point $f(z)$:

$$f(z+h) = f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h).$$

Notons $w_h = f'(z)h+h\varepsilon(h)$. Alors (et comme dans les exercices précédents on utilise « epsilon » pour n'importe quelle fonction tendant vers zéro lorsque sa variable tend vers zéro) :

$$g(f(z+h)) = g(f(z)+w_h) = g(f(z))+g'(f(z))w_h+w_h\varepsilon(w_h).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{h}\big(g(f(z+h))-g(f(z))\big) = \big(g'(f(z))+\varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h}.$$

Lorsque $h\to 0$, on a $w_h\to 0$, donc $\varepsilon(w_h)\to 0$ et par ailleurs $\frac{w_h}{h}\to f'(z)$. Au final

$$(g\circ f)'(z) = \lim_{h\to 0}\big(g'(f(z))+\varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h} = g'(f(z))f'(z).$$

Correction de l'exercice 5 ▲

La formule de Leibniz se montre par récurrence. Le cas $n=1$, c'est-à-dire $(fg)'=fg'+f'g$, a été démontré dans l'exercice 2. Supposons alors que cette formule soit vraie au rang $n \geqslant 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz}\left((fg)^{(n)}\right)(z) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{f^{(j+1)}(z)g^{(n-j)}(z)+f^{(j)}(z)g^{(n-j+1)}(z)\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z)+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z).\end{aligned}$$

La conclusion vient du fait : $\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}=\binom{n+1}{j}$ qui est simple à vérifier.

Correction de l'exercice 6 ▲

Prenons $r<\min(R_1,R_2)$. Alors, il existe $C>0$ et $0<\lambda<1$ tels que $|a_n|r^n \leqslant C\lambda^n$ et $|b_n|r^n \leqslant C\lambda^n$ (vérifiez-le !). D'où

$$\sum_{j=0}^{n}|a_j|r^j|b_{n-j}|r^{n-j} \leqslant (n+1)C^2\lambda^n ,$$

ce qui permet d'affirmer, pour tout z avec $|z|=r$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(\sum_{j=0}^{n}|a_jz^j||b_{n-j}z^{n-j}|\big)<\infty .$$

Par le théorème du cours sur les séries doubles (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, Annexe 8.2), ceci signifie que la série double

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_jz^jb_kz^k)$$

est absolument convergente. On peut donc d'après ce théorème affirmer :

$$f(z)g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=\sum_{n=0}^{\infty}\big(\sum_{j=0}^{n}(a_jz^j)(b_{n-j}z^{n-j})\big) .$$

Or, la série de droite est $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ avec $c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$. Au passage on obtient que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à r. Comme $r<\min(R_1,R_2)$ est arbitraire, le rayon de convergence est en fait au moins égal à $\min(R_1,R_2)$ (il peut être plus grand comme on le voit par exemple avec $f(z)=\frac{1}{1-z}$ et $g(z)=1-z$, ou encore avec $f(z)=\frac{2-z}{(1-z)(3-z)}$ et $g(z)=\frac{1-z}{(2-z)(3-z)}$).

Correction de l'exercice 7 ▲

Il suffit d'utiliser la formule de Leibniz de l'exercice 5 et le fait que le coefficient a_n du développement de f à l'origine est $a_n=f^{(n)}(0)/n!$.

Correction de l'exercice 8 ▲

La fonction $f(z)=\bar{z}$ n'est nulle part dérivable au sens complexe (et donc nulle part holomorphe) : car

$$\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z))=\frac{\bar{h}}{h}$$

et la limite de cette expression n'existe pas lorsque $h\to 0$. *Remarque.* Plus généralement, une application $\mathbb{R}$–linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme

$$w\mapsto \alpha w+\beta\overline{w} \tag{1}$$

(ce n'est qu'une écriture complexe des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ; une telle application est holomorphe si et seulement si $\beta=0$. C'est exactement la différence entre différentiabilité (donc réelle) et holomorphie (dérivabilité au sens complexe). En effet, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f(z)=0$ où $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. C'est une réécriture complexe des équations de Cauchy-Riemann. Si vous avez une fonction f différentiable, alors sa différentielle $Df(z)$ est une application linéaire de la forme (1). Un calcul simple montre que dans ce cas

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \quad et \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. De nouveau, f est complexe différentiable en z si et seulement si $\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. Dans ce cas $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$. Revenons à l'exercice. Si vous êtes d'accord avec ma remarque, alors nous sommes aussi d'accord sur le fait que :

$$z \mapsto x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

n'est pas holomorphe. Ce raisonnement s'applique aussi à $z \mapsto y$. Nous reviendrons à ce genre d'applications dans l'exercice 10.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour éviter des raisonnements topologiques, supposons dans un premier temps que Ω soit un disque, par exemple le disque unité $\Omega = D = D(0,1)$, et montrons que f est constante et égale à $f(0)$. Si $z \in D$, alors le segment $[0,z] \subset D$ (et c'est pour cette raison que l'on a pris $\Omega = D$). On peut écrire

$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(z)\,dz = 0.$$

Seulement, ici il faut expliquer le sens de cette intégrale (non connue pour l'instant). Soit $\gamma : [0,1] \to [0,z]$, $\gamma(t) = tz$, une paramérisation du segment $[0,z]$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^z f'(w)\,dw &= \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f'(tz)z\,dt \\ &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(f'(tz)z\right)dt + i\int_0^1 \mathrm{Im}\left(f'(tz)z\right)dt = 0.\end{aligned}$$

Pour le cas d'un ouvert connexe Ω quelconque le précédent raisonnement montre qu'au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$ la fonction f est constante. C'est donc une propriété ouverte. Autrement dit, si $z_0 \in \Omega$ est un point quelconque, l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{z \in \Omega;\; f(z) = f(z_0)\}$$

est un ouvert. Pour conclure il faut établir que $\mathscr{E}$ est aussi un fermé de Ω (topologie induite !!). Or ceci est évident puisque $\mathscr{E} = f^{-1}(\{f(z_0)\})$ et f est continue. Notons que $\mathscr{E} \neq \emptyset$ puisque $z_0 \in \mathscr{E}$. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés du connexe Ω étant l'ensemble vide et Ω, on a $\Omega = \mathscr{E}$. La fonction f est constante sur Ω. Si Ω n'est pas connexe, f peut prendre différentes valeurs sur les différentes composantes connexes de Ω.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $f(z) = u(z) + iv(z)$ pour $z \in U$. Si f ne prend que des valeurs réelles, alors $v \equiv 0$. On tire des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

La dérivée de f est alors identiquement nulle sur l'ouvert connexe Ω ce qui implique que f est constante (voir l'exercice 9).

Correction de l'exercice 11 ▲

1. La formule de Taylor avec reste intégral est
$$g(b)=g(a)+g'(a)(b-a)+\ldots+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\,dt$$
puis on remplace avec $a=0$ et $b=1$.
2. Si $f'=f$ et si f est n–fois dérivable au sens complexe, alors $\lim_{h\to0}(f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z))/h=\lim_{h\to0}(f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z))/h=f^{(n)}(z)$. Par récurrence on en déduit, d'une part, que f est infiniment dérivable et, d'autre part, que $f^{(n)}(z)=f(z)$ pour tout $n\geqslant 0$. En particulier, $f^{(n)}(0)=1$ pour tout $n\geqslant 0$. En utilisant la formule de Taylor de la question précédente on a donc
$$\begin{aligned}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| &\leqslant |z|^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}|f^{(n+1)}(uz)|\,du\\ &\leqslant |z|^{n+1}\sup_{|w|\leqslant|z|}|f^{(n+1)}(w)|\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}\,du\leqslant\sup_{|w|\leqslant|z|}|f(w)|\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$
Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. D'où $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$.
3. Fixons $z\in\mathbb{C}$ et notons $a_k=\frac{z^k}{k!}$. Alors :
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=|z|\frac{1}{k+1}\to0$$
lorsque $k\to\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de cette série est ∞ (d'Alembert) et que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus :
$$F'(z)=\sum_{k\geqslant1}\frac{kz^{k-1}}{k!}=F(z)$$
pour tout $z\in\mathbb{C}$. Par le théorème sur les séries doubles (en fait l'exercice 6)
$$\begin{aligned}F(z)F(w)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}z^jw^{k-j}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+w)^k=F(z+w).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Non $\limsup_{n\to\infty}|a_nz^n|=+\infty$ mais il n'y a pas de raison pour que $\liminf_{n\to\infty}|a_nz^n|=+\infty$. Prenez par exemple la série : $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$, de rayon de convergence $R=1$, mais $(|a_nz^n|)$ n'a pas de limite (la valeur est 0 pour n impair et $|z|^n$ pour n pair, qui tend vers l'infini lorsque $|z|>1$).

Correction de l'exercice 13 ▲

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\qquad |z|<1.$$
$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}\quad\text{pour}\quad |z|<1.$$
etc.

Correction de l'exercice 14 ▲

Discutons d'abord le rayon de convergence. D'ailleurs, ce qui suit s'applique également aux exercices suivants. Donc, d'après le théorème d'analycité des fonctions holomoephes (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol : théorème 10 du chapitre 6), si f est holomorphe dans $U\subset\mathbb{C}$, si $z_0\in U$ et si $r>0$ tel que $D(z_0,r)\subset U$, alors la série de Taylor de f en z_0 converge et sa somme vaut f dans ce disque $D(z_0,r)$. Ici $f(z)=\frac{1}{z-1}$. Cette fonction est holomorphe dans $U=\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Par conséquent, si $z_0\in U$, alors la série de Taylor de f en z_0 vaut f dans le disque $D(z_0,R_1)$ si $R_1=|z_0-1|$. Le calcul de la série est classique :

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-z_0+z_0-1}=\frac{1}{z_0-1}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)}=\frac{1}{z_0-1}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)^k$$

pour $|z-z_0|<|z_0-1|=R_1$.

Correction de l'exercice 15 ▲

La fonction $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans $U=\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Par ce que l'on vient de dire à l'exercice précédent, le rayon de convergence demandé est $R=\min\{|z_0-1|,|z_0-2|\}$, où $z_0\in U$ est un point quelconque fixé. On a $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$ et :

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-z_0+z_0-2}=\frac{1}{z_0-2}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)}=\frac{1}{z_0-2}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)^k$$

pour $|z-z_0|<|z_0-2|=R_2$. La série demandée est alors la différence entre celle-ci et celle de l'exercice précédent. Notons aussi que le rayon de convergence est exactement le minimum des rayons R_1 et R_2.

Correction de l'exercice 17 ▲

Le rayon de convergence est $R=1$. Soit $0<t<1$ et étudions $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{2^k}$. Il s'agit d'une série de termes positifs. D'où

$$f(t)\geqslant\sum_{k=0}^{N-1}t^{2^k}\quad\text{pour tout}\quad N\in\mathbb{N}.$$

Il en résulte $\liminf_{t\to 1}f(t)\geqslant N$ or N est arbitraire, donc $\lim_{t\to 1}f(t)=\infty$. Soit maintenant w un nombre complexe du cercle unité vérifiant $w^{2^N}=1$ pour un $N\in\mathbb{N}$. Dans ce cas $w^{2^k}=1$ pour tout $k\geqslant N$. Si de nouveau $0<t<1$, alors

$$f(tw)=\sum_{k=0}^{N-1}(tw)^{2^k}+\sum_{k\geqslant N}t^{2^k}.$$

Lorsque $t\to 1$, alors la première somme tend vers un nombre complexe (fini, en fait de module au plus N) et la deuxième vers ∞. Les nombres complexes w ayant la propriété $w^{2^N}=1$ pour un certain $N\in\mathbb{N}$ sont denses dans le cercle unité $\{|z|=1\}$. Ceci, et le principe de prolongement analytique, interdit l'existence de la fonction g holomorphe sur U comme décrit dans l'exercice. Si $z_0\in D(0,1)$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est $R=1-|z_0|$.

Correction de l'exercice 20 ▲

Il s'agit de formules bien connues lorsque les arguments z,w sont réels. La vérification à partir des définitions des fonctions trigonométriques données dans l'énoncé de l'exercice est laissée au lecteur. Voici comment obtenir la formule :

$$\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)\qquad \textit{pour}\quad z,w\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Fixons $w\in\mathbb{R}$. Soit $f_w(z)=\cos(z+w)-\big(\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)\big)$. La formule (2) étant vraie pour $z,w\in\mathbb{R}$, $f_w(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{R}$. Il résulte du principe des zéros isolés que f_w est identiquement nulle. Autrement dit, on vient d'établir la formule (2) pour $(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Il suffit maintenant de refaire le même argument en fixant d'abord $z\in\mathbb{C}$ arbitrairement et en observant que la fonction holomorphe

$$g_z(w)=\cos(z+w)-(\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w))$$

est nulle pour tout $w\in\mathbb{R}$. De nouveau $g_z\equiv 0$ par le principe des zéros isolés, d'où la formule (2) pour tout $z,w\in\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 21 ▲

$$\begin{aligned}\sin(a)ch(b)+i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b) &= \frac{1}{4i}\left\{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{b}+e^{-b})-(e^{ia}+e^{-ia})(e^{b}-e^{-b})\right\}\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{ia-b}-e^{-ia+b}\right)=\sin(a+ib).\end{aligned}$$

Si $a,b\in\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}|\sin(a+ib)|^2 &= (\sin(a)\,\mathrm{ch}(b))^2+(\cos(a)\,\mathrm{sh}(b))^2\\ &= \sin^2(a)(1+\mathrm{sh}^2(b))+(1-\sin^2(a))\,\mathrm{sh}^2(b)\\ &= \sin^2(a)+\mathrm{sh}^2(b).\end{aligned}$$

Cette somme de carrés de nombres réels ne peut être nulle que si $\sin(a)=0$ et $\mathrm{sh}(b)=0$, c'est-à-dire $a\in\pi\mathbb{Z}$ et $b=0$. Donc $\sin(z)=0 \iff z\in\pi\mathbb{Z}$.