Enoncés : Barbara Tumpach

Révisions – Algèbre linéaire

Exercice 1

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :
$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [002768]

Exercice 2

Résoudre le système suivant de 5 équations à 6 inconnues :
$$\begin{cases} 2x + y + z - 2u + 3v - w = 1 \\ 3x + 2y + 2z - 3u + 5v - 3w = 4 \\ 2x + 2y + 2z - 2u + 4v - 4w = 6 \\ x + y + z - u + 2v - 2w = 3 \\ 3x - 3u + 3v + 3w = -6 \end{cases}$$

[002769]

Exercice 3

Pour chaque couple de matrices (A_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant 5$, ci-dessous

1. donner la nature de l'ensemble des solutions du système $A_iX = b_i$;
2. donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de $A_iX = b_i$;
3. donner une base de l'image et une base du noyau de A_i.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; [002770]

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Exercice 4

Calculer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+y+z, 2x+y+z, 2x+2y+z, y+z) \end{array}$$

Quel est le rang de f ? [002771]

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = AC$. La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F de taille $(3,3)$ telles que $AF = 0$, (où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

[002772]

Exercice 6

Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse. [002773]

Exercice 7

Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Correction ▼ Vidéo ■ [002774]

Exercice 8

Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[002775]

Exercice 9

On désigne par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau = (i\,j)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma' \circ \sigma}$.
3. En déduire que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

[002776]

Exercice 10

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002777]

Correction de **l'exercice 1 ▲**

1. (a) **Par substitution.** La première équation s'écrit aussi $y = 1-2x$. On remplace maintenant y dans la deuxième équation

$$3x+7y=-2 \implies 3x+7(1-2x)=-2 \implies 11x=9 \implies x=\frac{9}{11}.$$

On en déduit y : $y = 1-2x = 1-2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$. La solution de ce système est donc le couple $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$. N'oubliez pas de vérifier que votre solution fonctionne !

(b) **Par le pivot de Gauss.** On garde la ligne L_1 et on remplace la ligne L_2 par $2L_2-3L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ & & 11y & = & -7 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire : on en déduit $y = -\frac{7}{11}$ et alors la première ligne permet d'obtenir $x = \frac{9}{11}$.

(c) **Par les matrices.** En terme matriciel le système s'écrit

$$AX = Y \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X = A^{-1}Y.$$

L'inverse d'une matrice 2×2 se calcule ainsi

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Il faut bien sûr que le déterminant $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ soit différent de 0.

Ici on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(d) **Par les formules de Cramer.** Les formules de Cramer pour un système de deux équations sont les suivantes si le déterminant vérifie $ad-bc \neq 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right. \implies x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Ce qui donne ici :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2. (a) Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2-1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a \neq \pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat ! Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y = 2-ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$. On en déduit que si $a \neq \pm 1$ alors $x = \frac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.

Traitons maintenant les cas particuliers. Si $a=1$ alors le système devient : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ Mais on ne peut avoir en même temps $x+y=2$ et $x+y=\frac{1}{2}$. Donc il n'y a pas de solution.

Si $a=-1$ alors le système devient : $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ et il n'y a pas de solution.

(b) Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2-(a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique (x,y). Par exemple avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a=0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 7 ▲

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a) A n'est pas la matrice nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$; (b) il y a 3 lignes donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 3$ (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

1. Montrons de différentes façons que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   - **Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   - **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice A est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes : la deuxième $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonne. Donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   - **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
     Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !
2. En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = 2 &\iff (a,2,-1,b) \in \mathrm{Vect}\{(3,0,1,-4),(5,4,-1,2)\} \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (a,2,-1,b) = \lambda(3,0,1,-4)+\mu(5,4,-1,2) \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 3\lambda+5\mu = a \\ 4\mu = 2 \\ \lambda-\mu = -1 \\ -4\lambda+2\mu = b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ b = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion la rang de A est 2 si $(a,b)=(1,3)$. Sinon le rang de A est 3.
