



Vecteurs propres et valeurs propres

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de \mathbb{R}^n , et à appliquer un changement de base à la matrice d'un endomorphisme.

Exercice 1

1. (a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}.$$

- (b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . On la notera A .
- (c) Montrer que le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
- (d) Montrer que le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
- (e) Calculer graphiquement l'image du vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat par le calcul.
- (f) Montrer que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de \mathbb{R}^2 .
- (g) Quelle est la matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? On la notera D .
- (h) Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur \vec{v}_1 et dont la deuxième colonne est le vecteur \vec{v}_2 . Calculer P^{-1} .
- (i) Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?
- (j) Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Même exercice avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

[002761]

Exercice 2

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002762]

Exercice 3

Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

Exercice 4

Trouver une matrice carrée inversible P telle que $B = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002764]

Exercice 5 DS mai 2008

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f , un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

- (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
(b) En déduire que l'on peut diagonaliser A .
- (a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres tels que la matrice de f dans la base \mathcal{B}' soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- Préciser la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' ; quelle relation lie les matrices A , P , P^{-1} et D ?

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
- Après avoir donné D^n , calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002765]

Exercice 6 DS mai 2008

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer les valeurs propres de A .
- (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A .
(b) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A .

[002766]

Exercice 7

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les inconnues doivent-elles satisfaire pour que cette matrice soit diagonalisable ? Ces conditions étant remplies, fournir une base de vecteurs propres pour A .

[002767]