



## Déterminants

---

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer le déterminant d'une matrice de taille quelconque, et d'apprendre à utiliser les déterminants dans l'inversion de matrices et la résolutions de systèmes linéaires.

### Exercice 1

---

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de  $\mathbb{R}^3$  à coefficients entiers est un nombre entier.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002753]

### Exercice 2

---

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[002754]

### Exercice 3

---

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[002755]

### Exercice 4

---

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002756]

**Exercice 5**

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & k & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

[002757]

**Exercice 6**

Soit  $M = (m_{ij})$  une matrice carrée de taille  $n$ . On construit à partir de  $M$  la matrice  $N = (n_{ij})$  de la manière suivante : pour tout couple d'indices  $i, j$ , on appelle  $M_{ij}$  la matrice obtenue à partir de  $M$  en rayant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ ; alors  $n_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ . Démontrer que  $MN = NM = \det(M)I$ , où  $I$  désigne la matrice identité. En déduire une méthode d'inversion de matrices passant par le calcul de déterminants, et l'appliquer à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002758]

**Exercice 7**

Calculer les inverses des matrices suivantes de deux manières différentes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002759]

**Exercice 8**

En utilisant le déterminant montrer que chacun des systèmes suivants admet une solution unique. Résoudre chacun de ces système en inversant la matrice de ses coefficients :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y + z - t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

[002760]

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. L'aire  $\mathcal{A}$  du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  est la valeur absolue du déterminant  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  donc  $\mathcal{A} = |ad - bc|$ . Ici on trouve  $\mathcal{A} = \text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$  où abs désigne la fonction valeur absolue.
2. Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des trois vecteurs. Ici

$$\mathcal{V} = \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{abs} \left( +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = 4$$

où l'on a développé par rapport à la première ligne.

3. Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.
-