Enoncés : Barbara Tumpach

Calcul matriciel

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre les opérations sur les matrices : somme, produit de matrices, transposée, puissances d'une matrice, inverse.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer *lorsque cela est bien défini* les produits de matrices suivants : AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE. [002747]

Exercice 2

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer : $(A-2B)C$, C^TA, C^TB, $C^T(A^T-2B^T)$, où C^T désigne la matrice transposée de C. [002748]

Exercice 3

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec successivement

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}.$$

[002749]

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002750]

Exercice 5

Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002751]

Exercice 6

L'*exponentielle* d'une matrice carrée M est, par définition, la limite de la série

$$e^M = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}.$$

On admet que cette limite existe en vertu d'un théorème d'analyse.

1. Montrer que si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$. On est autorisé, pour traiter cette question, à passer à la limite sans précautions.
2. Calculer e^M pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Chercher un exemple simple où $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

[002752]