



## Applications linéaires – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

---

Le but de cette feuille d'exercices est de comprendre ce qu'est une application linéaire, et d'apprendre à calculer une base du noyau et de l'image d'une telle application.

### Exercice 1

---

1. On munit  $\mathbb{R}^2$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer qu'une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $O$  dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre  $O$  dans la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

[002740]

### Exercice 2

---

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + t, x + y + z + t, 2x + 2y + 2z + 2t).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Vérifier que les vecteurs  $\vec{a} = (1, -1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, -1, 0)$  et  $\vec{c} = (0, 0, 1, -1)$  appartiennent à  $\ker f$ .
3. Vérifier que le vecteur  $\vec{d} = (5, 5, 5, 10)$  appartient à  $\text{Im} f$ .

[002741]

### Exercice 3

---

Soit l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z).$$

1. Justifier que  $f$  est linéaire.
2. Donner la matrice de  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $f$ , noté  $\ker f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de  $f$  et une base de  $\text{Im} f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle surjective ?

[002742]

### Exercice 4

---

1. Soit  $f$  une application linéaire surjective de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Quelle est la dimension du noyau de  $f$  ?
2. Soit  $g$  une application injective de  $\mathbb{R}^{26}$  dans  $\mathbb{R}^{100}$ . Quelle est la dimension de l'image de  $g$  ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre  $\mathbb{R}^{50}$  et  $\mathbb{R}^{72}$  ?

**Exercice 5**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de  $A$ .
2. Déterminer une base de l'image de  $A$ .

[002744]

**Exercice 6**

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de  $B$ .
2. Déterminer une base de l'image de  $B$ .

[002745]

**Exercice 7**

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de  $C$ .
2. Déterminer une base de l'image de  $C$ .

[002746]