Enoncés : Barbara Tumpach

# Applications linéaires – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

*Le but de cette feuille d'exercices est de comprendre ce qu'est une application linéaire, et d'apprendre à calculer une base du noyau et de l'image d'une telle application.*

**Exercice 1**

1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle $\theta$ et de centre $O$ dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre $O$ dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

[002740]

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, 2x+2y+2z+2t).$$

1. Montrer que $f$ est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1,-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,-1,0)$ et $\vec{c} = (0,0,1,-1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5,5,5,10)$ appartient à $\mathrm{Im} f$.

[002741]

**Exercice 3**

Soit l'application $f\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z).$$

1. Justifier que $f$ est linéaire.
2. Donner la matrice de $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de $f$, noté $\ker f$.
   (b) L'application $f$ est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de $f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) L'application $f$ est-elle surjective ?

[002742]

**Exercice 4**

1. Soit $f$ une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de $f$ ?
2. Soit $g$ une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de $g$ ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$ ?

[002743]

**Exercice 5**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de $A$.
2. Déterminer une base de l'image de $A$.

[002744]

**Exercice 6**

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de $B$.
2. Déterminer une base de l'image de $B$.

[002745]

**Exercice 7**

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de $C$.
2. Déterminer une base de l'image de $C$.

[002746]