



Sujets d'examen

Partiel

Exercice 1

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

1. Donner la définition de “ D est ouvert.” (Ceci est une question de cours !)
2. Donner la définition de “ $a \in \mathbb{R}^2$ est un point adhérent de D .” (Ceci est une question de cours !)
On considère dans la suite de l'exercice l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

3. Dessiner D .
4. Montrer que D n'est pas ouvert.
5. Déterminer \overline{D} , l'adhérence de D . On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

[002647]

Exercice 2

On considère la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Tracer les lignes de niveau $f(x, y) = 2$, $f(x, y) = 4$.
2. Tracer le graphe de la fonction f . Expliquer votre dessin en quelques phrases, en identifiant notamment les intersections du graphe de f avec les plans parallèles aux trois plans des coordonnées.

[002648]

Exercice 3

On considère une suite $(u_n)_n$, de terme général $u_n \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de convergence pour une telle suite. (Ceci est une question de cours !)
2. Soit la suite de terme général $u_n = (\operatorname{th}(n), \cos(n) \exp(-n^2))$. Étudier sa convergence.

[002649]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y}{x - y}, \quad \text{si } x \neq y \\ &= x, \quad \text{si } x = y. \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -2)$.
2. Pour tout $v = (\cos \theta, \sin \theta)$, calculer $D_v f(1, -2)$. Pour quelles valeurs de $\theta \in [0, 2\pi[$, $D_v f(1, -2) = 0$?

3. Étudier la continuité de f au point $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.
4. Étudier la continuité de f au point $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.
5. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et les déterminer.
6. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(0, 0)$ existe pour $v = (1, 1)$, et la déterminer. On constatera que l'égalité $D_v f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) + \partial_y f(0, 0)$ n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.

[002650]

Examen

Exercice 5

1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Donner la définition de “ f est différentiable en a ”.
2. Montrer que, si f est différentiable en a , alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle df_a de f en a et les dérivées partielles de f en a .
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera brièvement sa réponse.
 - (A) Si f est différentiable en a , alors elle y est continue.
 - (B) Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors f est différentiable en a .

[002651]

Exercice 6

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

Exercice 7

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation

$$y^2(x^2 + 1) + x^2(y^2 + 1) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $b > 0$ tel que le point de coordonnées $(1/2, b)$ se trouve sur \mathcal{C} . Déterminer b , puis déterminer l'équation de la droite tangente à \mathcal{C} , passant par $(1/2, b)$.
2. Trouver l'unique fonction $\varphi : x \in]-1, 1[\rightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$ telle que $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et que φ est décroissante sur $[0, 1[$. Tracer \mathcal{C} .
3. Énoncer le théorème des fonctions implicites et montrer qu'il existe exactement deux points de la courbe \mathcal{C} où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas pour écrire, au voisinage de chacun de ces deux points, y comme fonction de x .

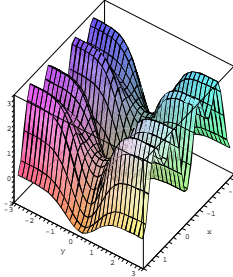
[002653]

Exercice 8

On considère la fonction

$$f(x, y) = (1 + 2 \cos^2(\pi x))(1 - \exp(-y^2)) + \sin(\pi x).$$

Son graphe est reproduit dans la figure ci-dessous.



1. Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature. Vos résultats sont-ils compatibles avec le graphe de la fonction, reproduit ci-dessus ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(1, 1, f(1, 1))$. Tracer la droite d'intersection de ce plan avec le plan xOy .

[002654]

Exercice 9

On considère les quatre surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, définies par les équations suivantes :

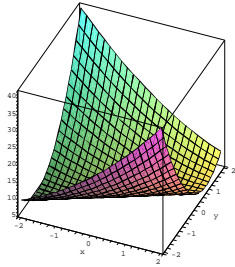
$$z^2 - \exp(2x^2 + y^2) = 0 \quad (\Sigma_1)$$

$$z = x^2 + 3y^2 + 4 \quad (\Sigma_2)$$

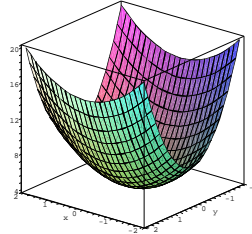
$$z - (x - 2y)^2 - 4 = 0 \quad (\Sigma_3)$$

$$\exp(x^2 + y^2) + \exp(y^2 + z^2) = 3 \quad (\Sigma_4)$$

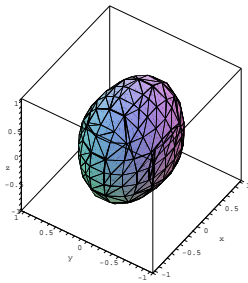
Les quatre surfaces sont tracées dans les parties A, B, C et D de la figure sur la page suivante. Indiquer quelle surface correspond à quelle partie de la figure. On justifiera très brièvement ses réponses.



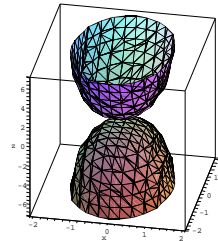
A



B



C



D

[002655]