



## Plans tangents à un graphe, différentiabilité

---

### Exercice 1

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point  $(x_0, y_0, z_0)$  donné :

1.  $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$ ;
2.  $z = \sin(\pi xy) \exp(2x^2 y - 1)$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002628]

### Exercice 2

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation  $z = x^4 - y^2$  au point  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$ . Sa réponse est

$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002629]

### Exercice 3

Trouver les points sur le parabolôïde  $z = 4x^2 + y^2$  où le plan tangent est parallèle au plan  $x + 2y + z = 6$ . Même question avec le plan  $3x + 5y - 2z = 3$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002630]

### Exercice 4

Soit  $C$  le cône d'équation  $z^2 = x^2 + y^2$  et  $C^+$  le demi-cône où  $z \geq 0$ . Pour un point quelconque  $M_0$  de  $C \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , de coordonnées  $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ , on note  $\mathcal{P}_{M_0}$  le plan tangent au cône  $C$  en  $M_0$ .

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan  $\mathcal{P}_{M_0}$ .
2. Montrer que l'intersection du cône  $C$  avec le plan vertical d'équation  $y = ax$  où  $a \in \mathbb{R}$  est constituée de deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  et que l'intersection du demi-cône  $C^+$  avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites  $\mathcal{D}_1^+$  et  $\mathcal{D}_2^+$ .
3. Montrer que le plan tangent au cône  $C$  est le même en tout point de  $\mathcal{D}_1 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  (respectivement en tout point de  $\mathcal{D}_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ).

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002631]

### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 - 2y^3$ .

1. Déterminer l'équation du plan tangent  $\mathcal{P}_{M_0}$  au graphe  $G_f$  de  $f$  en un point quelconque  $M_0$  de  $G_f$ .
2. Pour le point  $M_0$  de coordonnées  $(2, 1, 2)$ , déterminer tous les points  $M$  tels que le plan tangent en  $M$  soit parallèle à  $\mathcal{P}_{M_0}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002632]

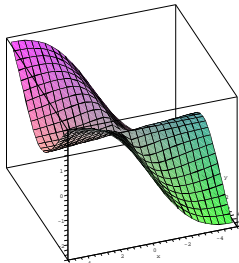
### Exercice 6

Soit la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et  $f(0,0) = 0$ .

1. Montrer que  $f$  est continue et que, quel que soit  $v \in \mathbb{R}^2$ , la dérivée directionnelle  $D_v f(x,y)$  existe en chaque  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  mais que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0,0)$ .
2. La dérivée directionnelle  $D_v f(0,0)$  est-elle linéaire en  $v$ ? Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs  $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$ , forment-elles un plan? Expliquer comment on peut observer la réponse sur la figure.
3. Le vecteur  $v$  étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de  $D_v f(x,y)$  en  $(x,y)$ ?



[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002633]

### Exercice 7

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16) \cos(0.02)], \quad \arctan[\sqrt{4.03} - 2 \exp(0.01)].$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002634]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Le plan tangent à la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Dans le cas (1.), les calculs deviennent plus simples avec l'équation

$$z^2 = 19 - x^2 - y^2.$$

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Le plan tangent à la surface d'équation  $z = f(x, y)$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Le vecteur normal de la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est le vecteur

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right). \quad (3)$$

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Utiliser la version (2) de l'équation d'un plan tangent à une surface en un point.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Pour les majorations, utiliser les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  dans le plan. Distinguer tout de suite les parties triviales des parties non triviales de l'exercice.

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Prendre

$$f(x, y) = \exp[\sin(\pi + x) \cos y] = \exp[-\sin x \cos y],$$
$$h(x, y) = \arctan[\sqrt{4 + x} - 2 \exp(y)].$$

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. Le plan tangent à la surface d'équation  $z^2 = 19 - x^2 - y^2$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$

d'où, au point  $(1, 3, 3)$ , cette équation s'écrit

$$6(z - 3) = -2(x - 1) - 6(y - 3)$$

ou

$$x + 3y + 3z = 19$$

2. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1)$ . Les dérivées partielles de  $f$  sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \pi y \cos(\pi xy) \exp(2x^2y - 1) + 4xy \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pi x \cos(\pi xy) \exp(2x^2y - 1) + 2x^2 \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1)\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1/2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1/2) = 2.$$

Le plan tangent à la surface d'équation  $z = \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1)$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

d'où, au point  $(1, 1/2, 1)$ , cette équation s'écrit

$$z - 1 = 2(x - 1) + 2(y - 1/2)$$

ou

$$2x + 2y - z = 2.$$

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire !
2. La confusion est exactement celle à éviter suivant les indications données.
3. D'après (1), le plan tangent à la surface d'équation  $z = f(x, y) = x^4 - y^2$  au point  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$  est donné par l'équation

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)(y - 3)$$

c.a.d.

$$z - 7 = 32(x - 2) - 6(y - 3).$$

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

Suivant l'indication, le plan tangent à la surface d'équation  $z = 4x^2 + y^2$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$\begin{aligned}z &= z_0 + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0\end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0. \quad (4)$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation  $x + 2y + z = 6$  il faut et il suffit que  $(1, 2) = (-8x_0, -2y_0)$  d'où que  $x_0 = -1/8$  et  $y_0 = -1$ . Par conséquent, le point cherché sur le parabolôïde  $z = 4x^2 + y^2$  est le point  $(-1/8, -1, 17/16)$ . De même, pour que le plan (4) soit parallèle au plan d'équation  $3x + 5y - 2z = 3$  il faut et il suffit que  $(3/2, 5/2) = (8x_0, 2y_0)$  d'où que  $x_0 = 3/16$  et  $y_0 = 5/4$ , et le point cherché sur le parabolôïde  $z = 4x^2 + y^2$  est alors le point  $(3/16, 5/4, 9/64 + 25/16) = (3/16, 5/4, 109/64)$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le vecteur normal du cône  $C$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $C$  est le vecteur  $(x_0, y_0, -z_0)$  et le plan tangent au cône  $C$  en ce point est donné par l'équation

$$x_0x + y_0y - z_0z = 0$$

car l'origine appartient à ce plan.

2. L'intersection du cône  $C$  avec le plan vertical d'équation  $y = ax$  où  $a \in \mathbb{R}$  est constituée des points  $x(1, a, \pm\sqrt{1+a^2})$  où  $x \in \mathbb{R}$ , c.a.d. des deux droites

$$\mathcal{D}_1 = \{x(1, a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{x(1, a, -\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}.$$

L'intersection du demi-cône  $C^+$  avec ce plan vertical est donc constituée des deux demi-droites

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^+ &= \{x(1, a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \\ \mathcal{D}_2^+ &= \{x(-1, -a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

3. Le vecteur normal en un point quelconque  $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$  de  $\mathcal{D}_1$  respectivement  $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$  de  $\mathcal{D}_2$  est le vecteur  $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$  respectivement  $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$  d'où la direction et donc le plan tangent au cône  $C$  sont le même en tout point de  $\mathcal{D}_1 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  respectivement  $\mathcal{D}_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. La forme (2) de l'équation du plan tangent au graphe  $z = x^2 - 2y^3$  de la fonction  $f$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  nous donne l'équation

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 6y_0^2(y - y_0) = 2x_0x - 6y_0^2y - 2x_0^2 + 6y_0^3$$

2. Au point  $(2, 1, 2)$ , ce plan tangent est ainsi donné par l'équation

$$4x - 6y - z = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan tangent au point  $(x_1, y_1, z_1)$  distinct de  $(x_0, y_0, z_0)$  il faut et il suffit que  $(4, 6, -1) = (2x_1, 6y_1^2, -1)$  et  $y_1 \neq 1$ , c.a.d. que  $(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, 6)$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1.  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \varphi \sin^2 \varphi$  existe et vaut zéro puisque  $\cos \varphi \sin^2 \varphi$  est borné. Par conséquent  $f$  est continue à l'origine et donc partout. Il est évident que la fonction  $f$  est différentiable en chaque point distinct de l'origine. Soit  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  non nul. Alors

$$D_v f(0, 0) = \left. \frac{d}{dt} \left( t \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \right) \right|_{t=0} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

existe d'où  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ ; puisqu'il existe une dérivée directionnelle non nulle, la fonction  $f$  ne peut pas être différentiable en  $(0, 0)$ .

2. L'association  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto D_v f(0,0)$  n'est évidemment pas linéaire et les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs  $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$  ne forment pas un plan.
3. Dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$D_v f(x,y) = D_v f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = a(\sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) + 2b \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

et,  $\varphi$  étant fixé,

$$\lim_{r \rightarrow 0} D_v f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = a(\sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) + 2b \sin \varphi \cos^3 \varphi.$$

Par conséquent,  $D_v f(x,y)$  n'est pas continu en  $(x,y)$  sauf peut-être si  $a = 0$ . Par exemple, avec  $\sin \varphi = 1$ , on trouve

$$\lim_{r \rightarrow 0} D_v f(0, r) = a$$

et  $a \neq \frac{ab^2}{a^2+b^2}$  sauf si  $a = 0$ . Si  $a = 0$ , la dérivée directionnelle  $D_v$  est la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et,  $\varphi$  étant fixé,

$$\lim_{r \rightarrow 0} D_v f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 2b \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

ce qui n'est pas nul si  $\sin \varphi \cos \varphi$  ne l'est pas. Puisque  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'est continue en  $(0,0)$  non plus.

### Correction de l'exercice 7 ▲

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x \cos y \exp[-\sin x \cos y]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \sin y \exp[-\sin x \cos y]$$

etc. d'où, avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ ,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \dots = 1 - x + \dots$$

Avec  $x = 0,0184$  on trouve, pour  $\exp[\sin(3.16) \cos(0.02)]$ , la valeur approchée  $1 - 0,0184 = 0,9816$ .

N.B. On peut faire mieux si nécessaire : Avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\sin x \cos y + \cos^2 x \cos^2 y) \exp[-\sin x \cos y]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (\cos x \sin y + \cos x \cos y \sin x \sin y) \exp[-\sin x \cos y]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\sin x \cos y + \sin^2 x \sin^2 y) \exp[-\sin x \cos y]$$

on trouve

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \dots = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

etc.

De même,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2(1 + (\sqrt{4+x} - 2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2\exp(y)}{1 + (\sqrt{4+x} - 2\exp(y))^2}$$

etc. d'où, avec  $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}$  et  $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -2$ ,

$$h(x,y) = h(0,0) + \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y + \dots = \frac{1}{4}x - 2y + \dots$$

Avec  $x = 0,03$  et  $y = 0,01$  on trouve, pour  $\arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)]$ , la valeur approchée  $0,0075 - 0,02 = -0,00125$ .

---