Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Plans tangents à un graphe, différentiabilité

Exercice 1

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z=\sqrt{19-x^2-y^2}, \quad (x_0,y_0,z_0)=(1,3,3)$;
2. $z=\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1), \quad (x_0,y_0,z_0)=(1,1/2,1)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002628]

Exercice 2

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=x^4-y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,7)$. Sa réponse est

$$z=4x^3(x-2)-2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Indication ▼ Correction ▼ [002629]

Exercice 3

Trouver les points sur le paraboloïde $z=4x^2+y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x+2y+z=6$. Même question avec le plan $3x+5y-2z=3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002630]

Exercice 4

Soit C le cône d'équation $z^2=x^2+y^2$ et C^+ le demi-cône où $z\geqslant 0$. Pour un point quelconque M_0 de $C\setminus\{(0,0,0)\}$, de coordonnées $(x_0,y_0,\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2})$, on note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathscr{P}_{M_0}$.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y=ax$ où $a\in\mathbb{R}$ est constituée de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites $\mathscr{D}_1^+$ et $\mathscr{D}_2^+$.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathscr{D}_1\setminus\{(0,0,0)\}$ (respectivement en tout point de $\mathscr{D}_2\setminus\{(0,0,0)\}$).

Indication ▼ Correction ▼ [002631]

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2-2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002632]

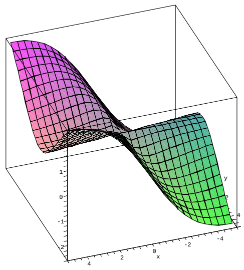
Exercice 6

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $v \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $D_v f(x,y)$ existe en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. La dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ est-elle linéaire en v ? Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ? Expliquer comment on peut observer la réponse sur la figure.
3. Le vecteur v étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $D_v f(x,y)$ en (x,y) ?



Indication ▼ Correction ▼ [002633]

Exercice 7

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))], \quad \arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)].$$

Indication ▼ Correction ▼ [002634]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{1}$$

Dans le cas (1.), les calculs deviennt plus simples avec l'équation

$$z^2 = 19 - x^2 - y^2.$$

Indication pour l'exercice 2 ▲

Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{2}$$

Indication pour l'exercice 4 ▲

Le vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right). \tag{3}$$

Indication pour l'exercice 5 ▲

Utiliser la version (2) de l'équation d'un plan tangent à une surface en un point.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Pour les majorations, utiliser les coordonnées polaires (r, φ) dans le plan. Distinguer tout de suite les parties triviales des parties non triviales de l'exercice.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Prendre

$$f(x,y) = \exp[\sin(\pi + x)\cos y] = \exp[-\sin x \cos y],$$
$$h(x,y) = \arctan[\sqrt{4+x} - 2\exp(y)].$$

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Le plan tangent à la surface d'équation $z^2 = 19 - x^2 - y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$

d'où, au point $(1, 3, 3)$, cette équation s'écrit

$$6(z - 3) = -2(x - 1) - 6(y - 3)$$

ou

$$x + 3y + 3z = 19$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy)\exp(2x^2y - 1) + 4xy\sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x\cos(\pi xy)\exp(2x^2y - 1) + 2x^2\sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1/2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1/2) = 2.$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

d'où, au point $(1, 1/2, 1)$, cette équation s'écrit

$$z - 1 = 2(x - 1) + 2(y - 1/2)$$

ou

$$2x + 2y - z = 2.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire !
2. La confusion est exactement celle à éviter suivant les indications données.
3. D'après (1), le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y) = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$ est donné par l'équation

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)(y - 3)$$

c.a.d.

$$z - 7 = 32(x - 2) - 6(y - 3).$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Suivant l'indication, le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0 \end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0. \tag{4}$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x+2y+z=6$ il faut et il suffit que $(1,2)=(-8x_0,-2y_0)$ d'où que $x_0=-1/8$ et $y_0=-1$. Par conséquent, le point cherché sur le paraboloïde $z=4x^2+y^2$ est le point $(-1/8,-1,17/16)$. De même, pour que le plan (4) soit parallèle au plan d'équation $3x+5y-2z=3$ il faut et il suffit que $(3/2,5/2)=(8x_0,2y_0)$ d'où que $x_0=3/16$ et $y_0=5/4$, et le point cherché sur le paraboloïde $z=4x^2+y^2$ est alors le point $(3/16,5/4,9/64+25/16)$ =$(3/16,5/4,109/64)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le vecteur normal du cône C au point (x_0,y_0,z_0) de C est le vecteur $(x_0,y_0,-z_0)$ et le plan tangent au cône C en ce point est donné par l'équation

$$x_0x+y_0y-z_0z=0$$

car l'origine appartient à ce plan.

2. L'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y=ax$ où $a\in\mathbb{R}$ est constituée des points $x(1,a,\pm\sqrt{1+a^2})$ où $x\in\mathbb{R}$, c.a.d. des deux droites

$$\mathscr{D}_1=\{x(1,a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R}\},\quad \mathscr{D}_2=\{x(1,a,-\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R}\}.$$

L'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est donc constituée des deux demi-droites

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_1^+&=\{x(1,a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R},x\geqslant 0\}\\ \mathscr{D}_2^+&=\{x(-1,-a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R},x\geqslant 0\}.\end{aligned}$$

3. Le vecteur normal en un point quelconque $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_1$ respectivement $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ respectivement $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ d'où la direction et donc le plan tangent au cône C sont le même en tout point de $\mathscr{D}_1\setminus\{(0,0,0)\}$ respectivement $\mathscr{D}_2\setminus\{(0,0,0)\}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. La forme (2) de l'équation du plan tangent au graphe $z=x^2-2y^3$ de la fonction f au point (x_0,y_0,z_0) nous donne l'équation

$$z-z_0=2x_0(x-x_0)-6y_0^2(y-y_0)=2x_0x-6y_0^2y-2x_0^2+6y_0^3$$

2. Au point $(2,1,2)$, ce plan tangent est ainsi donné par l'équation

$$4x-6y-z=0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan tangent au point (x_1,y_1,z_1) distinct de (x_0,y_0,z_0) il faut et il suffit que $(4,6,-1)=(2x_1,6y_1^2,-1)$ et $y_1\neq 1$, c.a.d. que $(x_1,y_1,z_1)=(2,-1,6)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos\varphi\sin^2\varphi$ existe et vaut zéro puisque $\cos\varphi\sin^2\varphi$ est borné. Par conséquent f est continue à l'origine et donc partout. Il est évident que la fonction f est différentiable en chaque point distinct de l'origine. Soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ non nul. Alors

$$D_vf(0,0)=\frac{d}{dt}\left(t\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\Big|_{t=0}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

existe d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; puisqu'il existe une dérivée directionnelle non nulle, la fonction f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

2. L'association $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto D_v f(0,0)$ n'est évidemment pas linéaire et les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$ ne forment pas un plan.
3. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2)-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2\sin\varphi\cos^3\varphi$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$D_v f(x,y) = D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Par conséquent, $D_v f(x,y)$ n'est pas continu en (x,y) sauf peut-être si $a = 0$. Par exemple, avec $\sin\varphi = 1$, on trouve

$$\lim_{r\to 0} D_v f(0,r) = a$$

et $a \neq \frac{ab^2}{a^2+b^2}$ sauf si $a = 0$. Si $a = 0$, la dérivée directionnelle D_v est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

ce qui n'est pas nul si $\sin\varphi\cos\varphi$ ne l'est pas. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est continue en $(0,0)$ non plus.

Correction de l'exercice 7 ▲

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x\cos y\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x\sin y\exp[-\sin x\cos y]$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \ldots = 1 - x + \ldots$$

Avec $x = 0,0184$ on trouve, pour $\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))]$, la valeur approchée $1 - 0,0184 = 0,9816$.
N.B. On peut faire mieux si nécessaire : Avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\sin x\cos y + \cos^2 x\cos^2 y)\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (\cos x\sin y + \cos x\cos y\sin x\sin y)\exp[-\sin x\cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\sin x\cos y + \sin^2 x\sin^2 y)\exp[-\sin x\cos y]$$

on trouve

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \ldots = 1 - x + +\tfrac{1}{2}x^2 + \ldots$$

etc.

De même,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= -\frac{2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}
\end{aligned}$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{4}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)=-2$,

$$h(x,y)=h(0,0)+\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y+\ldots=\tfrac{1}{4}x-2y+\ldots.$$

Avec $x=0,03$ et $y=0,01$ on trouve, pour $\arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)]$, la valeur approchée $0,0075-0,02=-0,00125$.