Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Exo7

Dérivées partielles : Révisions

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002624]

Exercice 2

Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.
6. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002625]

Exercice 3

Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002626]

Exercice 4

On considère les fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.

4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indication ▼ Correction ▼ [002627]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\log r = 0$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Pour réfuter la différentiabilité de f en $(0,0)$, il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ du graphe $z=f(x,y)$ de F est donnée par l'équation

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{2}$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

Calculer mène à la vérité.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Écrire $f(x,y)=(\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2))=(u,v,w)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $f(x,y)=(x^2+y^2)^x=\mathrm{e}^{x\log(x^2+y^2)}=\mathrm{e}^{2r\cos\varphi\log r}$. Puisque $\cos\varphi$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r=0$ d'où
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=\mathrm{e}^{\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r}=\mathrm{e}^0=1,$$
car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

3. Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x,0)-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{(x^2)^x-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\mathrm{e}^{2x\log x}-1}{x}$$
existe. Si $x>0$,
$$\frac{\mathrm{e}^{2x\log x}-1}{x}=2\log x+\varepsilon(x)$$
où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\varepsilon(x)=0$. Par conséquent, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. D'autre part,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{f(0,y)-1}{y}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{(y^2)^0-1}{y}=0$$
existe.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Puisque $f(x,y)=\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=r(\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^3\varphi)$, il s'ensuit que
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=0$$
car $\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^3\varphi$ reste borné. Par conséquent la fonction f est continue en $(0,0)$.

2. Les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{0}{x^2}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{f(0,y)}{y}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\frac{3y^3}{y^2}=3$$
existent.

3. Puisque $f(x,x)=\frac{4x^3}{2x^2}=2x$, la dérivée directionnelle $D_vf(0,0)$ suivant le vecteur $v=(1,1)$ est non nulle. Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=-4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

5. D'après (2), cette équation s'écrit

$$z-2=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=1-x+3(y-1)$$

d'où $z=3y-x$.

6. La fonction $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ s'écrit $F(x,y)=\left(\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2},\frac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2}\right)$ et sa matrice jacobienne

$$\mathrm{J}_F(1,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

au point $(1,1)$ est inversible. Par conséquent, la fonction F admet une réciproque locale au voisinage du point $(1,1)$. Au point $(2,2)$,

$$\mathrm{J}_F(2,2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

d'où la fonction F admet également une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}$$

d'où (1).

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $g(f(x,y))=xy^2\sin^2(xy)\cos x\exp(y^2)$
2. $$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}=y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy)-x\sin x\sin(xy)+\cos x\sin(xy))$$
$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}=2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy)+(1+y^2)\sin(xy))$$
3. Calculons d'abord
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=y\sin(xy)\exp(y^2)+xy^2\cos(xy)\exp(y^2)\\&=y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy))\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=x\sin(xy)\exp(y^2)+x^2y\cos(xy)\exp(y^2)+2xy^2\sin(xy)\exp(y^2)\\&=x\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)+2y^2\sin(xy))\\&=x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy)).\end{aligned}$$
Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit
$$\begin{aligned}\mathrm{J_f}&=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\sin x & \cos x\\ y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy))\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned} J_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] = [vw, uw, uv] \\ &= \left[xy^2 \sin(xy)\cos x \exp(y^2), xy\sin^2(xy)\exp(y^2), y\sin(xy)\cos x\right] \end{aligned}$$

4. La matrice jacobienne $J_{g\circ f}$ de la fonction composée $g \circ f$ s'écrit comme produit matricielle

$$J_{g\circ f} = J_g \circ J_f = \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))y\cos(xy) \\ &\quad - (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))y\sin x \\ &\quad + (y\sin(xy)\cos x)y\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\ &= xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2)) - xy^2\sin x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\ &\quad + y^2\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) \\ &= y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\sin x\sin(xy) + \cos x\sin(xy)) \\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))x\cos(xy) \\ &\quad + (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))\cos x \\ &\quad + (y\sin(xy)\cos x)x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\ &= x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + xy\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\ &\quad + xy(1+2y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) \\ &= 2x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy(1+y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\ &= 2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy) + (1+y^2)\sin(xy)). \end{aligned}$$
