



## Dérivées partielles : Révisions

---

### Exercice 1

---

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 1$ .

1. La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?
2. Déterminer les dérivées partielles de  $f$  en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles par rapport à  $x$ , à  $y$  en  $(0, 0)$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002624]

### Exercice 2

---

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0),$$
$$f(0, 0) = 0.$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ? Justifier la réponse.
2. La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles par rapport à  $x$ , à  $y$  en  $(0, 0)$  ? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de  $f$  en un point  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de  $f$  au point  $(1, 1, 2)$ .
6. Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction définie par  $F(x, y) = (f(x, y), f(y, x))$ . Déterminer la matrice jacobienne de  $F$  au point  $(1, 1)$ . La fonction  $F$  admet-elle une réciproque locale au voisinage du point  $(2, 2)$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002625]

### Exercice 3

---

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002626]

### Exercice 4

---

On considère les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, x y \sin(xy) \exp(y^2)), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement  $g \circ f$ .

2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de  $g \circ f$ .
3. Déterminer les matrices jacobiniennes  $J_f(x, y)$  et  $J_g(u, v, w)$  de  $f$  et de  $g$ .
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiniennes.

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002627]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1. Utiliser les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  dans le plan et le fait que  $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} r \log r = 0$ .
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

1. Pour réfuter la différentiabilité de  $f$  en  $(0, 0)$ , il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  du graphe  $z = f(x, y)$  de  $F$  est donnée par l'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Calculer mène à la vérité.

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Écrire  $f(x, y) = (\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2)) = (u, v, w)$ .

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

1.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x = e^{x \log(x^2 + y^2)} = e^{2r \cos \varphi \log r}$ . Puisque  $\cos \varphi$  est borné,  $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} 2r \cos \varphi \log r = 0$  d'où

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = e^{\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} 2r \cos \varphi \log r} = e^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  les dérivées partielles par rapport aux variables  $x$  et  $y$  se calculent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left( \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^x \end{aligned}$$

3. Pour que la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x, 0) - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{x > 0} \frac{e^{2x \log x} - 1}{x}$$

existe. Si  $x > 0$ ,

$$\frac{e^{2x \log x} - 1}{x} = 2 \log x + \varepsilon(x)$$

où  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$ . Par conséquent, la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  n'existe pas. D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0, y) - 1}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{(y^2)^0 - 1}{y} = 0$$

existe.

## Correction de l'exercice 2 ▲

1. Puisque  $f(x, y) = \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = r(\cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \sin^3 \varphi)$ , il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 0$$

car  $\cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \sin^3 \varphi$  reste borné. Par conséquent la fonction  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

2. Les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{0}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0, y)}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{3y^3}{y^2} = 3 \end{aligned}$$

existent.

3. Puisque  $f(x, x) = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x$ , la dérivée directionnelle  $D_v f(0, 0)$  suivant le vecteur  $v = (1, 1)$  est non nulle. Par conséquent, la fonction  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

- 4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = -4 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 8x^2 y^2 + 3y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

5. D'après (2), cette équation s'écrit

$$z - 2 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = 1 - x + 3(y - 1)$$

d'où  $z = 3y - x$ .

6. La fonction  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s'écrit  $F(x, y) = \left( \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2}, \frac{y^2x + 3x^3}{x^2 + y^2} \right)$  et sa matrice jacobienne

$$J_F(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

au point  $(1, 1)$  est inversible. Par conséquent, la fonction  $F$  admet une réciproque locale au voisinage du point  $(1, 1)$ . Au point  $(2, 2)$ ,

$$J_F(2, 2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où la fonction  $F$  admet également une réciproque locale au voisinage du point  $(2, 2)$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

d'où (1).

### Correction de l'exercice 4 ▲

1.  $g(f(x, y)) = xy^2 \sin^2(xy) \cos x \exp(y^2)$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2) (2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2) (xy \cos(xy) + (1 + y^2) \sin(xy)) \end{aligned}$$

3. Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= y \sin(xy) \exp(y^2) + xy^2 \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= x \sin(xy) \exp(y^2) + x^2 y \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \sin(xy) \exp(y^2) \\ &= x \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy) + 2y^2 \sin(xy)) \\ &= x \exp(y^2) ((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)). \end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne  $J_f$  de  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned} J_f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & y \cos(xy) & & x \cos(xy) \\ & -y \sin x & & \cos x \\ y \exp(y^2) (\sin(xy) + xy \cos(xy)) & & x \exp(y^2) ((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne  $J_g$  de  $g$  est :

$$\begin{aligned} J_g &= \left[ \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right] = [vw, uw, uv] \\ &= [xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2), xy \sin^2(xy) \exp(y^2), y \sin(xy) \cos x] \end{aligned}$$

4. La matrice jacobienne  $J_{g \circ f}$  de la fonction composée  $g \circ f$  s'écrit comme produit matricielle

$$J_{g \circ f} = J_g \circ J_f = \left[ \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2))y \cos(xy) \\ &\quad - (xy \sin^2(xy) \exp(y^2))y \sin x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x)y \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) - xy^2 \sin x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + y^2 \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2)(2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2))x \cos(xy) \\ &\quad + (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) \cos x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x)x \exp(y^2)((1 + 2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + xy \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + xy(1 + 2y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= 2x^2 y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy(1 + y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2)(xy \cos(xy) + (1 + y^2) \sin(xy)). \end{aligned}$$