



Sujets de l'année 2008-2009

1 Partiel

Exercice 1

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.

1. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrer qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Soit le vecteur $\vec{x} = (1, -1)$, vérifier que \vec{x} est un vecteur propre de A , et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre, \vec{y} , de A non colinéaire à \vec{x} et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base (\vec{x}, \vec{y}) .

[Correction ▼](#)

[002611]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E , si \vec{u} est un vecteur de E on note (x, y, z) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .
2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\text{Im } f$.
3. Soient $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .
4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.

[Correction ▼](#)

[002612]

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n . On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n .
2. On suppose maintenant que $n = 4$.
 - (a) Démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs \vec{x} et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.
 - (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs \vec{x}_1 et $f(\vec{x}_1)$.
 - i. Démontrer que F est stable par f .
 - ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$, démontrer que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E .
 - (c) Ecrire la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .
 - (d) Calculer $\det f$ et $\det(\lambda \text{id}_E - f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (e) L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼

[002613]

2 Examen

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$
 - (a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A .
 - (b) Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et

$$A = D + N.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminer les solutions de \mathcal{E} .

Correction ▼

[002614]

Exercice 5

Questions préliminaires :

- (a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et \vec{x} un vecteur propre associé à λ . Démontrer que \vec{x} est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
- (b) Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A . Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A .
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.
 - (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A .
 - (b) Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.
 - (c) Ecrire le polynôme caractéristique de B .
 - (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Correction ▼

[002615]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.

1. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On montre que $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

On a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

d'où $y_1 + y_2 = ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 = (a + c)x_1 + (b + d)x_2 = x_1 + x_2$.

2. Soit le vecteur $\vec{x} = (1, -1)$, vérifions que \vec{x} est un vecteur propre de A , et déterminons sa valeur propre.

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ c - d \end{pmatrix},$$

or $c - d = (1 - a) - (1 - b) = -(a - b)$, car $a + b = c + d = 1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -(a - b) \end{pmatrix} = (a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur \vec{x} est un vecteur propre de A pour la valeur propre $a - b$.

3. Déterminons le polynôme caractéristique de A et calculons ses racines.

Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse $a + b = c + d = 1$, nous écrivons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ 1 - a & 1 - b - X \end{vmatrix} = (a - X)(1 - b - X) - b(1 - a) = X^2 - (a - b + 1)X + (a - b).$$

On sait, d'après la question précédente que $a - b$ est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à $a - b$ et la somme à $a - b + 1$, ainsi la seconde racine est égale à 1 .

4. Déterminons un vecteur propre, \vec{y} , de A non colinéaire à \vec{x} et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base (\vec{x}, \vec{y}) .

Un vecteur propre non colinéaire à \vec{x} est vecteur propre pour la valeur propre 1 . Ainsi, si on note $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on a

$$A\vec{y} = \vec{y} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} ay_1 + by_2 = y_1 \\ (1 - a)y_1 + (1 - b)y_2 = y_2 \end{cases} \iff (a - 1)y_1 + by_2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{y} = (b, 1 - a)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 .

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E , si \vec{u} est un vecteur de E on note (x, y, z) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

1. *Ecrivons la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .*

On a $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$ et $f(\vec{e}_3) = (-1, 2, 4)$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Déterminons les sous-espaces $\ker f$ et $\text{Im } f$.*

Le sous-espace vectoriel $\text{Im } f$ est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$, c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$ et $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$ qui sont clairement linéairement indépendants.

Pour le noyau, on a $\ker f = \{\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$, ainsi,

$$\vec{u} = (x, y, z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2(x + z) = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v} = (1, 0, -1)$.

3. Soient $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. *Démontrons que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .*

Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E , car E est de dimension 3.

4. *Calculons $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminons la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.*

On a $f(\vec{u}_1) = \vec{0}$,

$$f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 2 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_2.$$

$$f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_3.$$

Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Déterminons les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.*

D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 0, 1 et 2, et les vecteurs propres sont \vec{u}_1 pour la valeur propre 0, \vec{u}_2 pour la valeur propre 1 et \vec{u}_3 pour la valeur propre 2.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n . On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n .*

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, on a alors

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$

ce qui implique n pair, car un carré est toujours positif.

2. On suppose maintenant que $n = 4$.

- (a) *Démontrons que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, les vecteurs \vec{x} et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.*

Soit $\vec{x} \in E$, on suppose $\vec{x} \neq \vec{0}$, supposons qu'il existe des réels a, b tels que $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$, on a alors

$$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \implies f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0} \implies af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$

car $f^2 = -\text{id}_E$. Or,

$$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \implies (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$

ce qui implique $a^2 + b^2 = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$, et, donc $a = b = 0$. Ce qui prouve que les vecteurs \vec{x} et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.

- (b) Soit $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs \vec{x}_1 et $f(\vec{x}_1)$.

- i. *Démontrons que F est stable par f .*

Soit $\vec{x} \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$, d'où

$$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}_1) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$

D'où la stabilité de F par f .

- ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$.

Démontrons que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E . La dimension de E étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$

on a alors,

$$a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) \in F,$$

et, comme F est stable par f ,

$$f(a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2)) = a_2f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$

Ce qui implique

$$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$

car on a supposé $\vec{x}_2 \notin F$. On a donc $a_2 = b_2 = 0$ et, par conséquent, $a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) = \vec{0}$, or les vecteurs \vec{x}_1 et $f(\vec{x}_1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique $a_1 = b_1 = 0$. D'où l'indépendance des vecteurs $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$.

(c) *Ecrivons la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .*

On calcule les images des vecteurs de la base \mathcal{B} . On a $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$, $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$, $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$, $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Calculons $\det f$ et $\det(\lambda \text{id}_E - f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.*

On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \text{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2.$$

(e) *L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?*

Les valeurs propres réelles de f sont les réels λ qui annulent $\det(\lambda \text{id}_E - f)$, ce sont donc les réels λ tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, f n'admet pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition

de Dunford si et seulement si N est nilpotente (il est clair que D est diagonale) et si $ND = DN$.

Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b . Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$N \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $ND = DN$ si et seulement si $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A .*

Commençons par déterminer les valeurs propres de A , ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces propres de A .

$$E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 0)$, ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

$$E_2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z \end{cases}$$

L'espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(a, 1, 1)$. La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique N_2 associé est égal à l'espace E_2 .

Déterminons le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1. On a $N_1 = \ker(A - I)^2$. Calculons la matrice $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de $(A - I)^2$ est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$.

(b) *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*

$$A = D + N.$$

Notons $\vec{e}_3 = (a, 1, 1)$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_M.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$ vérifient, N nilpotente, D diagonalisable et $ND = DN$.
Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de \mathcal{E} .

Remarquons que, si l'on note $X = (x_1, x_2, x_3)$, le système \mathcal{E} s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice A précédente avec $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où $V = (a, b, c)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Par ailleurs $X = PY$ est solution de $X' = AX \iff Y$ est solution de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_B Y$. La solution générale

du système $Y' = BY$ s'écrit $Y = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^3$. Calculons donc l'exponentielle de la matrice tB pour $t \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question précédente que $B = \Delta + M$ avec $\Delta M = M\Delta$, ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta) \cdot \exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot (I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système \mathcal{E} s'écrit donc $X = P \exp(tB) \cdot V$ où $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a + 2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Questions préliminaires :

- (a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et \vec{x} un vecteur propre associé à λ .

Démontrons que \vec{x} est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

On a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, et, par récurrence sur n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$. Notons

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d$, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}) &= (a_0\text{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \dots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur \vec{x} est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

- (b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E . Soit P le polynôme caractéristique de u , alors $P(u) = 0$ (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de E)

Version matricielle : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice et P_A son polynôme caractéristique, alors $P_A(A) = 0$ (le zéro étant celui de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons les valeurs propres de A .

Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et -8 valeur propre simple.

Déterminons une base de vecteurs propres de A .

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x + y + 9z = y \\ 9x - 8z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs $\vec{e}_1 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$ forment une base.

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre -8 , on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x + y + 9z = -8y \\ 9x - 8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre -8 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = (0, 1, -1)$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ci-dessus forment une base de E composée de vecteurs propres de A .

Diagonalisons A .

Dans cette base, la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

(a) *Démontrons que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A .*

On considère le polynôme $P(X) = X^3$, on applique la question préliminaire a). Si λ est une valeur propre de B , alors $P(\lambda) = \lambda^3$ est une valeur propre de $A = P(B) = B^3$.

(b) *Déterminons les valeurs propres de B et leur multiplicité.*

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B (elles existent toujours dans \mathbb{C}) et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sachant que les valeurs propres de A sont $1, 1$ et -8 , on a $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ et $\lambda_3^3 = -8$. Ainsi les valeurs propres de B sont 1 de multiplicité 2 et -2 de multiplicité 1 .

(c) *Ecrivons le polynôme caractéristique de B .*

Compte tenu de la question précédente, on a

$$P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X).$$

(d) *Déterminons B telle que $B^3 = A$.*

On a $P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X) = -X^3 + 3X - 2$, or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_B(B) = 0$, c'est-à-dire $-B^3 + 3B - 2I = 0$, par conséquent

$$A = B^3 = 3B - 2I.$$

Ainsi, $B = 1/3(A + 2I)$, d'où,

$$B = 1/3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$