



## Sujets de l'année 2008-2009

---

### 1 Partiel

#### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose  $a + c = b + d = 1$  et  $a - b \neq 1$ .

1. Soient  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrer qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Soit le vecteur  $\vec{x} = (1, -1)$ , vérifier que  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$ , et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$  et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre,  $\vec{y}$ , de  $A$  non colinéaire à  $\vec{x}$  et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par  $A$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

[Correction ▼](#)

[002611]

#### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. On note  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ , si  $\vec{u}$  est un vecteur de  $E$  on note  $(x, y, z)$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Déterminer les sous-espaces  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .
3. Soient  $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$  et  $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ . Démontrer que  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $E$ .
4. Calculer  $f(\vec{u}_1)$ ,  $f(\vec{u}_2)$  et  $f(\vec{u}_3)$  et déterminer la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ .
5. Déterminer les valeurs propres de  $f$  et, pour chacune, un vecteur propre.

[Correction ▼](#)

[002612]

#### Exercice 3

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On cherche à déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_n$ , où  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ . On notera  $f$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de  $n$ .
2. On suppose maintenant que  $n = 4$ .
  - (a) Démontrer que pour tout  $\vec{x} \in E$ ,  $\vec{x} \neq 0$ , les vecteurs  $\vec{x}$  et  $f(\vec{x})$  sont linéairement indépendants.
  - (b) Soit  $\vec{x}_1 \neq 0$ , on note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $\vec{x}_1$  et  $f(\vec{x}_1)$ .
    - i. Démontrer que  $F$  est stable par  $f$ .
    - ii. Soit  $\vec{x}_2 \in E$ , on suppose que  $\vec{x}_2 \notin F$ , démontrer que  $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$  est une base de  $E$ .
  - (c) Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - (d) Calculer  $\det f$  et  $\det(\lambda \text{id}_E - f)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (e) L'endomorphisme  $f$  admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼

[002613]

## 2 Examen

### Exercice 4

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de  $a$  et de  $b$  pour lesquelles la décomposition de Dunford de  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose dans la suite que  $b = 1$  et  $a \neq 0$ 
  - (a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de  $A$ .
  - (b) Trouver  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente telles que  $D$  commute avec  $N$  et

$$A = D + N.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminer les solutions de  $\mathcal{E}$ .

Correction ▼

[002614]

### Exercice 5

#### Questions préliminaires :

- (a) Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $\vec{x}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Démontrer que  $\vec{x}$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $P(u)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ .
- (b) Énoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$ . Donner une base de vecteurs propres de  $A$  et diagonaliser  $A$ .
2. On cherche à déterminer une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .
  - (a) Démontrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $B$  alors  $\lambda^3$  est une valeur propre de  $A$ .
  - (b) Déterminer les valeurs propres de  $B$  et leur multiplicité.
  - (c) Ecrire le polynôme caractéristique de  $B$ .
  - (d) Déterminer  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

## Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose  $a + c = b + d = 1$  et  $a - b \neq 1$ .

1. Soient  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On montre que  $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ .

On a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

d'où  $y_1 + y_2 = ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 = (a + c)x_1 + (b + d)x_2 = x_1 + x_2$ .

2. Soit le vecteur  $\vec{x} = (1, -1)$ , vérifions que  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$ , et déterminons sa valeur propre.

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ c - d \end{pmatrix},$$

or  $c - d = (1 - a) - (1 - b) = -(a - b)$ , car  $a + b = c + d = 1$ . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -(a - b) \end{pmatrix} = (a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $a - b$ .

3. Déterminons le polynôme caractéristique de  $A$  et calculons ses racines.

Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse  $a + b = c + d = 1$ , nous écrivons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ 1 - a & 1 - b - X \end{vmatrix} = (a - X)(1 - b - X) - b(1 - a) = X^2 - (a - b + 1)X + (a - b).$$

On sait, d'après la question précédente que  $a - b$  est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à  $a - b$  et la somme à  $a - b + 1$ , ainsi la seconde racine est égale à  $1$ .

4. Déterminons un vecteur propre,  $\vec{y}$ , de  $A$  non colinéaire à  $\vec{x}$  et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par  $A$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

Un vecteur propre non colinéaire à  $\vec{x}$  est vecteur propre pour la valeur propre  $1$ . Ainsi, si on note  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ , on a

$$A\vec{y} = \vec{y} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} ay_1 + by_2 = y_1 \\ (1 - a)y_1 + (1 - b)y_2 = y_2 \end{cases} \iff (a - 1)y_1 + by_2 = 0.$$

Le vecteur  $\vec{y} = (b, 1 - a)$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $1$ .

## Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. On note  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ , si  $\vec{u}$  est un vecteur de  $E$  on note  $(x, y, z)$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

1. *Ecrivons la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .*

On a  $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$ ,  $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$  et  $f(\vec{e}_3) = (-1, 2, 4)$ . D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Déterminons les sous-espaces  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .*

Le sous-espace vectoriel  $\text{Im } f$  est engendré par les vecteurs  $f(\vec{e}_1)$ ,  $f(\vec{e}_2)$  et  $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$ , c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$  et  $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$  qui sont clairement linéairement indépendants.

Pour le noyau, on a  $\ker f = \{\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$ , ainsi,

$$\vec{u} = (x, y, z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2(x + z) = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{v} = (1, 0, -1)$ .

3. Soient  $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$  et  $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ . *Démontrons que  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $E$ .*

Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Ainsi, les trois vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de  $E$ , car  $E$  est de dimension 3.

4. *Calculons  $f(\vec{u}_1)$ ,  $f(\vec{u}_2)$  et  $f(\vec{u}_3)$  et déterminons la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ .*

On a  $f(\vec{u}_1) = \vec{0}$ ,

$$f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 2 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_2.$$

$$f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_3.$$

Ainsi la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Déterminons les valeurs propres de  $f$  et, pour chacune, un vecteur propre.*

D'après la question précédente, les valeurs propres de  $f$  sont 0, 1 et 2, et les vecteurs propres sont  $\vec{u}_1$  pour la valeur propre 0,  $\vec{u}_2$  pour la valeur propre 1 et  $\vec{u}_3$  pour la valeur propre 2.

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On cherche à déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_n$ , où  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ . On notera  $f$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base canonique.

1. *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de  $n$ .*

Supposons qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_n$ , on a alors

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$

ce qui implique  $n$  pair, car un carré est toujours positif.

2. On suppose maintenant que  $n = 4$ .

- (a) *Démontrons que pour tout  $\vec{x} \in E$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , les vecteurs  $\vec{x}$  et  $f(\vec{x})$  sont linéairement indépendants.*

Soit  $\vec{x} \in E$ , on suppose  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , supposons qu'il existe des réels  $a, b$  tels que  $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$ , on a alors

$$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \implies f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = f(\vec{0}) \implies af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$

car  $f^2 = -\text{id}_E$ . Or,

$$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \implies (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$

ce qui implique  $a^2 + b^2 = 0$  car  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , et, donc  $a = b = 0$ . Ce qui prouve que les vecteurs  $\vec{x}$  et  $f(\vec{x})$  sont linéairement indépendants.

- (b) Soit  $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ , on note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $\vec{x}_1$  et  $f(\vec{x}_1)$ .

- i. *Démontrons que  $F$  est stable par  $f$ .*

Soit  $\vec{x} \in F$ , il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$ , d'où

$$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}_1) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$

D'où la stabilité de  $F$  par  $f$ .

- ii. Soit  $\vec{x}_2 \in E$ , on suppose que  $\vec{x}_2 \notin F$ .

*Démontrons que  $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$  est une base de  $E$ .* La dimension de  $E$  étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe  $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$

on a alors,

$$a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2) \in F,$$

et, comme  $F$  est stable par  $f$ ,

$$f(a_2\vec{x}_2 + b_2f(\vec{x}_2)) = a_2f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$

Ce qui implique

$$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$

car on a supposé  $\vec{x}_2 \notin F$ . On a donc  $a_2 = b_2 = 0$  et, par conséquent,  $a_1\vec{x}_1 + b_1f(\vec{x}_1) = \vec{0}$ , or les vecteurs  $\vec{x}_1$  et  $f(\vec{x}_1)$  sont linéairement indépendants, ce qui implique  $a_1 = b_1 = 0$ . D'où l'indépendance des vecteurs  $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$ .

- (c) *Ecrivons la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .*

On calcule les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ . On a  $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$ ,  $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$ ,  $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$ ,  $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$ . D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Calculons  $\det f$  et  $\det(\lambda \text{id}_E - f)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \text{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2.$$

(e) L'endomorphisme  $f$  admet-il des valeurs propres réelles ?

Les valeurs propres réelles de  $f$  sont les réels  $\lambda$  qui annulent  $\det(\lambda \text{id}_E - f)$ , ce sont donc les réels  $\lambda$  tels que  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Ainsi,  $f$  n'admet pas de valeurs propres réelles.

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donnons les valeurs de  $a$  et de  $b$  pour lesquelles la décomposition de Dunford de  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Cette décomposition de  $A = D + N$  est sa décomposition

de Dunford si et seulement si  $N$  est nilpotente (il est clair que  $D$  est diagonale) et si  $ND = DN$ .

Vérifions que  $N$  est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice  $N$  est bien nilpotente quel que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ . Déterminons pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  les matrices commutent.

$$N \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $ND = DN$  si et seulement si  $b = 2b$ , c'est-à-dire si  $b = 0$ . Le paramètre  $a$  peut prendre n'importe quelle valeur.

2. On suppose dans la suite que  $b = 1$  et  $a \neq 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.*

Commençons par déterminer les valeurs propres de A, ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple. Notons  $E_1$  et  $E_2$  les sous-espaces propres de A.

$$E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace  $E_1$  est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, 0, 0)$ , ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

$$E_2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z \end{cases}$$

L'espace  $E_2$  est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(a, 1, 1)$ . La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique  $N_2$  associé est égal à l'espace  $E_2$ .

Déterminons le sous-espace caractéristique  $N_1$  associé à la valeur propre 1. On a  $N_1 = \ker(A - I)^2$ . Calculons la matrice  $(A - I)^2$ .

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de  $(A - I)^2$  est le plan engendré par les vecteurs  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$  et  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ .

(b) *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*

$$A = D + N.$$

Notons  $\vec{e}_3 = (a, 1, 1)$ , dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_M.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a  $A = PBP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Les matrices  $D = P\Delta P^{-1}$  et  $N = PMP^{-1}$  vérifient,  $N$  nilpotente,  $D$  diagonalisable et  $ND = DN$ .  
Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de  $\mathcal{E}$ .

Remarquons que, si l'on note  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , le système  $\mathcal{E}$  s'écrit  $X' = AX$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice  $A$  précédente avec  $a = 2$  et  $b = 1$ . La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où  $V = (a, b, c)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

Par ailleurs  $X = PY$  est solution de  $X' = AX \iff Y$  est solution de  $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_B Y$ . La solution générale

du système  $Y' = BY$  s'écrit  $Y = \exp(tB)V$  où  $V \in \mathbb{R}^3$ . Calculons donc l'exponentielle de la matrice  $tB$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . On a vu dans la question précédente que  $B = \Delta + M$  avec  $\Delta M = M\Delta$ , ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta) \cdot \exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot (I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système  $\mathcal{E}$  s'écrit donc  $X = P \exp(tB) \cdot V$  où  $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a + 2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

---

## Correction de l'exercice 5 ▲

---

### Questions préliminaires :

- (a) Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $\vec{x}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

Démontrons que  $\vec{x}$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $P(u)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ .

On a  $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ , et, par récurrence sur  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$ . Notons

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d$ , l'endomorphisme  $P(u)$  vérifie

$$\begin{aligned}P(u)(\vec{x}) &= (a_0\text{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \dots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x}\end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur  $\vec{x}$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $P(u)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ .

- (b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P$  le polynôme caractéristique de  $u$ , alors  $P(u) = 0$  (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de  $E$ )

Version matricielle : Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une matrice et  $P_A$  son polynôme caractéristique, alors  $P_A(A) = 0$  (le zéro étant celui de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons les valeurs propres de  $A$ .

Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

La matrice  $A$  admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et  $-8$  valeur propre simple.

Déterminons une base de vecteurs propres de  $A$ .

Soit  $\vec{u} = (x, y, z)$  un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x + y + 9z = y \\ 9x - 8z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs  $\vec{e}_1 = (0, 1, 0)$  et  $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$  forment une base.

Soit  $\vec{u} = (x, y, z)$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $-8$ , on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x + y + 9z = -8y \\ 9x - 8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-8$  est une droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_3 = (0, 1, -1)$ .

Les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ci-dessus forment une base de  $E$  composée de vecteurs propres de  $A$ .

Diagonalisons  $A$ .

Dans cette base, la matrice s'écrit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$  et on a  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche à déterminer une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

(a) *Démontrons que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $B$  alors  $\lambda^3$  est une valeur propre de  $A$ .*

On considère le polynôme  $P(X) = X^3$ , on applique la question préliminaire a). Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $B$ , alors  $P(\lambda) = \lambda^3$  est une valeur propre de  $A = P(B) = B^3$ .

(b) *Déterminons les valeurs propres de  $B$  et leur multiplicité.*

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les valeurs propres de  $B$  (elles existent toujours dans  $\mathbb{C}$ ) et  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de  $A$  pour les valeurs propres  $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$ . Sachant que les valeurs propres de  $A$  sont 1, 1 et  $-8$ , on a  $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$  et  $\lambda_3^3 = -8$ . Ainsi les valeurs propres de  $B$  sont 1 de multiplicité 2 et  $-2$  de multiplicité 1.

(c) *Ecrivons le polynôme caractéristique de  $B$ .*

Compte tenu de la question précédente, on a

$$P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X).$$

(d) *Déterminons  $B$  telle que  $B^3 = A$ .*

On a  $P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X) = -X^3 + 3X - 2$ , or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $P_B(B) = 0$ , c'est-à-dire  $-B^3 + 3B - 2I = 0$ , par conséquent

$$A = B^3 = 3B - 2I.$$

Ainsi,  $B = 1/3(A + 2I)$ , d'où,

$$B = 1/3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

---