



Sujets de l'année 2007-2008

1 Partiel

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

[Correction ▼](#)

[002603]

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
2. Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle. Quel est le sous-espace propre associé ? Que se passe-t-il si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

[Correction ▼](#)

[002604]

Exercice 3

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et -2 . Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

[Correction ▼](#)

[002605]

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A . L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? (Justifier).
2. Calculer $(A - I)^2$. Démontrer que $A^n = nA + (1 - n)I$.

Correction ▼

[002606]

2 Examen

Exercice 5

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer, sans calculs, des vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.
3. Soit \vec{e} tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrer que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^3 et écrire la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier.)

Correction ▼

[002607]

Exercice 6

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
3. Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).

4. Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Correction ▼

[002608]

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A .

2. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans \mathbb{R}^3 .
 - (a) Lorsque A est diagonalisable, donner une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A . Ecrire la solution générale du système.
 - (b) Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrer directement le système $x' = Ax$.
3. Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E . (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a .
4. Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0, +\infty[$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E . (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a .

Correction ▼

[002609]

3 Rattrapage

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

I

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α .

II

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice A .

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\ker(A + I)^2$ est un plan stable par f .
3. Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ ($AP = PB$).

4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

1. Vérifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A .
3. Donner les solutions du système différentiel $X' = AX$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
2. Trigonaliser la matrice A .

[Correction ▼](#)

[002610]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.

On développe le déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

$$\det A \neq 0 \iff 1 + a^3 \neq 0 \iff a \neq -1.$$

2. Calculons A^{-1} lorsque A est inversible.

On suppose $a \neq -1$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \tilde{A}$, où \tilde{A} est la comatrice de A et ${}^t \tilde{A}$ la transposée de \tilde{A} . On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} = {}^t \tilde{A}.$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \frac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons la nature géométrique de cet endomorphisme.

Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , la matrice A est la matrice de la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ d'angle θ .

On peut ajouter que les vecteurs colinéaires à \vec{k} sont fixes. Un vecteur de coordonnées (x, y, z) est envoyé sur le vecteur $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$, sa composante dans le plan engendré par \vec{i} et \vec{j} subit la rotation plane d'angle θ .

2. Démontrons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle et déterminons son sous-espace propre associé.

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A .

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} \cos \theta - X & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta - X & 0 \\ 0 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = [(\cos \theta - X)^2 + \sin^2 \theta](1 - X) \\ &= (1 - X)(X^2 - 2X \cos \theta + 1) \end{aligned}$$

Cherchons les racines du polynôme $X^2 - 2X \cos \theta + 1$, pour cela on calcule son discriminant réduit

$$\Delta' = \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta < 0,$$

en effet, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors $\sin \theta \neq 0$, donc le polynôme P_A n'admet qu'une racine réelle $\lambda = 1$. Son sous-espace propre associé est de dimension 1, c'est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ de la rotation.

Cas où $\theta \in \pi\mathbb{Z}$

On distingue les cas $\theta = n\pi$ avec n pair ou impair :

- Si $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de l'identité.

- Si $\theta = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la symétrie orthogonale par

rapport à l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$. Elle admet deux valeurs propres, la valeur propre 1 dont le sous-espace propre est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ et la valeur propre -1 dont le sous-espace propre est le plan $\mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A .

Par opérations sur les colonnes puis les lignes, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -2 \\ 2 & -X & 2 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 3 & 2+X & 1-X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 5 & 0 & 3-X \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = -(X+2)[(-4-X)(3-X)+10] = -(X+2)(X^2+X-2) = -(X+2)^2(X-1).$$

2. Démontrons que les valeurs propres de A sont 1 et -2 et déterminons les sous-espaces propres associés.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire, 1, valeur propre simple et, -2 , valeur propre double.

Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1,

$$E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z), A.\vec{u} = \vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x, y, z) \in E_1 \iff \begin{cases} -5x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 est donc une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (-2, 2, 3)$.

Notons E_{-2} le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 ,

$$E_{-2} = \{\vec{u} = (x, y, z), A.\vec{u} = -2\vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x, y, z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-2} est donc le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$, dont une base est donnée, par exemple, par $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (1, 0, -1)$.

3. *Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont de dimension la multiplicité de la valeur propre correspondante, ce qui prouve que la matrice A est diagonalisable. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la matrice de l'endomorphisme associé à A est diagonale, elle s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. *Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

La matrice de changement de base qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des vecteurs propres, trouvés ci-dessus, dans la base canonique est la matrice P cherchée

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

elle est inversible et on a $P^{-1}AP = D$. (Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé, ni nécessaire).

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculons les valeurs propres de A et voyons si l'endomorphisme u est diagonalisable.*

En opérant sur les colonnes et les lignes du déterminant, on obtient

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1-X & -X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = (1-X)[(3-X)(-1-X)+4] = (1-X)(X^2 - 2X + 1) = (1-X)^3.$$

Ainsi, la matrice A admet 1 comme valeur propre triple. Elle n'est donc pas diagonalisable, sinon elle serait égale à $I = I_3$, la matrice identité.

2. *Calculons $(A-I)^2$ et démontrons que $A^n = nA + (1-n)I$.*

On calcule d'abord la matrice $A-I$,

$$A-I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puis la matrice $(A-I)^2$,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc la matrice nulle.

Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que $A^n = nA + (1 - n)I$.

Première méthode : En utilisant le binôme de Newton. On écrit $A^n = (A - I + I)^n$, or, les matrices $A - I$ et I commutent, on a donc

$$(A - I + I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (A - I)^k I^{n-k} = C_n^0 I + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I.$$

Deuxième méthode : Par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Fixons n arbitrairement pour lequel on suppose que $A^n = nA + (1 - n)I$, on a alors

$$A^{n+1} = A(nA + (1 - n)I) = nA^2 + (1 - n)A,$$

sachant que $(A - I)^2 = 0$, on en déduit que $A^2 = 2A - I$ ainsi

$$A^{n+1} = n(2A - I) + (1 - n)A = (n + 1)A - nI = (n + 1)A + (1 - (n + 1))I.$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Déterminons les valeurs propres de A .

Calculons les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ -1 & 2 - X & 1 \\ 0 & 0 & 2 - X \end{vmatrix} = (2 - X)^2(1 - X).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.

2. Déterminons, sans calculs, des vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.

Si l'on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base dans laquelle est exprimée la matrice A de l'endomorphisme f , on remarque que

$$f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Ainsi, les vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_3$ répondent-ils à la question.

3. Soit \vec{e} tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrons que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^3 et écrivons la matrice de f dans cette base.

Notons $\vec{e} = (x, y, z)$ alors

$$f(\vec{e}) = \vec{e} \iff \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{e} = (1, 1, 0)$ convient. Les vecteurs \vec{e} , \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de \mathbb{R}^3 . La matrice de f dans cette base s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} x = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est une droite vectorielle, sa dimension n'est donc pas égale à la multiplicité de la valeur propre 2 comme racine du polynôme caractéristique, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A .

On note $P_A(X)$ le polynôme caractéristique, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X) \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)^2(1-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1, valeur propre simple, et -1 , valeur propre double.

2. Déterminons les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A .

La valeur propre 1 est simple, le sous-espace propre associé est égal au sous-espace caractéristique, c'est l'ensemble

$$E_1 = N_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ x - y = y \\ -x + 2y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur \vec{e}_1 est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (2, 1, 0)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est défini par

$$E_{-1} = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = -\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} x = -x \\ x - y = -y \\ -x + 2y - z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur \vec{e}_2 est donné, par exemple, par $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$. La dimension de E_{-1} n'est pas égale à la multiplicité de la racine, la matrice n'est pas diagonalisable. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1 . Pour cela calculons la matrice $(A + I)^2$.

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{-1} = \ker(A + I)^2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$$

Le sous-espace caractéristique N_{-1} est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = (0, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 0)$.

3. Démontrons qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (2, 1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$ et on cherche un vecteur $\vec{e} \in N_{-1}$ tel que $f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e}$. Notons $\vec{e} = (0, y, z)$,

$$f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e} \iff y = 1,$$

le vecteur $\vec{e} = \vec{e}_3 = (0, 1, 0)$ convient, on pouvait le voir directement sur la deuxième colonne de la matrice A . Ainsi, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$, la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P cherchée est la matrice de passage qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $AP = PB$ ou $A = PBP^{-1}$. On peut calculer P^{-1} , c'est la matrice qui exprime les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Ecrivons la décomposition de Dunford de B .

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N.$$

Il est clair que la matrice D est diagonalisable puisque diagonale, on vérifie facilement que $N^2 = 0$, c'est-à-dire que la matrice N est nilpotente et que les deux matrices commutent, $DN = ND$. Ainsi la décomposition $B = D + N$ est bien la décomposition de Dunford de la matrice B .

5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons $\exp tB$.

On utilise la décomposition de Dunford de la matrice tB , $tB = tD + tN$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \cdot \exp(tN)$$

car les matrices commutent, par ailleurs, comme D est diagonale, on a

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

et comme $N^2 = 0$, on a

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6. Donnons les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Les solutions du système différentiel $y'(t) = B.y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \exp(tB).V$ où V est un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Donc

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour trouver les solutions du système différentiel $x'(t) = A.x(t)$, on utilise le fait suivant

$$P.y \text{ est solution de } x' = A.x \iff y \text{ est solution de } y' = (P^{-1}AP).y = B.y.$$

Ainsi, les solutions du système $x' = A.x$ s'écrivent

$$x(t) = P.\exp(tB).V$$

où V est un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . On remarque qu'il n'est pas utile de calculer la matrice P^{-1} . C'est-à-dire

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^t \\ ae^t + ce^{-t} \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Déterminons le polynôme caractéristique de la matrice A .

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & a-X & 0 \\ 0 & a-2 & 2-X \end{vmatrix} = -X(a-X)(2-X).$$

Ce polynôme admet trois racines $0, a$ et 2 . Ainsi, si $a \notin \{0, 2\}$ la matrice est diagonalisable. Examinons les cas $a = 0$ et $a = 2$.

Si $a = 0$, la valeur propre 0 est valeur propre double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 0 est égal à $\ker A = \{\vec{u} = (x, y, z), A\vec{u} = \vec{0}\}$,

$$\vec{u} \in \ker A \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite vectorielle, la droite engendrée par $(1, 0, 0)$, la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Si $a = 2$, la valeur propre 2 est double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 2 est égal à $E_2 = \{\vec{u} = (x, y, z), A\vec{u} = 2\vec{u}\}$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff y = 2x.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est un plan vectoriel, le plan d'équation $y = 2x$, la matrice est donc diagonalisable.

Ainsi la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

Lorsque A est diagonalisable, déterminons une base de vecteurs propres de A .

On a $a \neq 0$ et on distingue les cas $a \neq 2$ et $a = 2$.

Si $a \neq 2$, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 2 sont lisibles sur la matrice, on a

$$E_0 = \ker A = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad E_2 = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1),$$

On détermine $E_a = \{\vec{u} = (x, y, z), A\vec{u} = a\vec{u}\}$.

$$\vec{u} \in E_a \iff \begin{cases} y = ax \\ ay = ay \\ (a-2)y + 2z = az \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ (a-2)y = (a-2)z \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ y = z \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v} = (1, a, a)$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, a, a)$.

Si $a = 2$, nous avons vu que le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est le plan d'équation $y = 2x$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, 2, 0)$.

2. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans \mathbb{R}^3 .

(a) Lorsque A est diagonalisable, donnons une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A et écrivons la solution générale du système.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A et \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 les vecteurs propres associés, on sait qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel $x' = Ax$ est donnée par

$$e^{\lambda_1 t} \vec{e}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{e}_2, e^{\lambda_3 t} \vec{e}_3.$$

Ainsi, si $a \neq 2$ cette base est donnée par

$$(1, 0, 0), e^{2t}(0, 0, 1), e^{at}(1, a, a)$$

et si $a = 2$, elle est donnée par

$$(1, 0, 0), e^{2t}(0, 0, 1), e^{2t}(1, 2, 0).$$

(b) Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrons directement le système $X' = AX$.

Lorsque A n'est pas diagonalisable, $a = 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le système $X' = AX$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = -2y + 2z \end{cases}$$

Si $y' = 0$, alors $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $x' = \alpha$, $x(t) = \alpha t + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ et la troisième équation devient

$$z' = 2z - 2\alpha$$

et sa solution s'écrit $z(t) = \gamma e^{2t} + \alpha$, $\gamma \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale du système

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \alpha \\ \gamma e^{2t} + \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de E .

Pour démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E , il suffit de démontrer que $0_E \in E_0$ et que E_0 est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans E_0 , par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) = \vec{0}$$

ce qui prouve que $a_1 s_1 + a_2 s_2 \in E_0$.

Déterminons sa dimension en fonction de a .

Nous avons, dans tous les cas, une base de l'espace des solutions, donc l'écriture de la solution générale, on regarde alors les solutions de E qui sont dans E_0 .

1er cas : $a \neq 2$ et $a \neq 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, e^{2t}) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, si $a > 0$, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$,

et si $a < 0$, $s(t) \in E_0 \iff \alpha = \beta = 0$, $\dim E_0 = 1$.

2ème cas : $a = 2$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, e^{2t}) + \gamma(e^{2t}, 2e^{2t}, 0), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

3ème cas : $a = 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, e^{2t}) + \gamma(t, 1, 1), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

4. Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0, +\infty[$. Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E , il suffit de démontrer que $0_E \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans F , par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$, donc dans F .

Déterminons sa dimension en fonction de a .

Comme dans le cas précédent, suivant la forme de la solution générale, on a

si $a \geq 0$, les seules solutions bornées sur $[0, +\infty[$ sont de la forme

$$s(t) = \alpha(1, 0, 0), \alpha \in \mathbb{R}, \text{ ainsi } \dim F = 1.$$

si $a < 0$, les seules solutions bornées sur $[0, +\infty[$ sont de la forme

$$s(t) = \alpha(1, 0, 0) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}), (\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \dim F = 2.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.

On a

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X) + \alpha+1] \\ &= -(X+1)[X^2 + (2-\alpha)X + 1 - \alpha]. \end{aligned}$$

Factorisons le polynôme $X^2 + (2-\alpha)X + 1 - \alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

2. Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.

Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α} , ainsi,

- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,

- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha - 1$, valeur propre simple.

3. Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.

Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x, y, z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x + (\alpha+1)z = -x \\ x - 2y = -y \\ -x + y + \alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.

- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.

- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

4. Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α .

Notons Q_A le polynôme minimal de A_α . On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans \mathbb{R} et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement $\alpha = -1$, on a donc

- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, on doit distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, en effet,
- si $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable donc les racines de Q_A ne sont pas toutes les deux simples, et P_A admet deux racines distinctes, donc

$$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$

- si $\alpha = 0$, on a $P_A(X) = -(X+1)^3$ et A_0 n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal peut donc être égal à $(X+1)^2$ ou à $(X+1)^3$, or

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc le polynôme minimal Q_A est égal à $(X+1)^3$.

II

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice A . On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

1. Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A .

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x, y, z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$.

Le sous-espace caractéristique de A , associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

2. Démontrons que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f .

On a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\ker(A+I)^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x+y+z=0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

3. Démontrons qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A + I)$, et $\ker(A + I)$ est la droite d'équations :

$\{z = 0, x - y = 0\}$; nous choisirons $e_2 \in \ker(A + I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A + I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x, y, z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A + I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (1, 0, 1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0, 0, 1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Décomposition de Dunford de B

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrices D et N , D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B .

5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons $\exp tB$ et exprimons $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.

On a $N^3 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^3 = 0$ et l'exponentielle est égale à

$$\exp(tN) = I + tN + (t^2/2)N^2,$$

par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(tN) = e^{-t}I \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \right)$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA , on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P \exp(tB) P^{-1}.$$

6. Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a, b, c)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 . La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.

La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt + c\frac{t^2}{2}) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} (a + b) + (c + b)t + c\frac{t^2}{2} \\ a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ (b + c) + ct \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifions que la matrice A est diagonalisable.

Nous avons vu dans la partie I)3) que lorsque $\alpha = -1$, la matrice est diagonalisable, en effet, dans ce cas, elle admet deux valeurs propres : -1 , valeur propre double et -2 , valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 étant le plan d'équation $x = y$.

2. Diagonalisons la matrice A .

Pour cela déterminons une base de vecteurs propres. Le plan $x = y$ est engendré par les vecteurs $u(1, 1, 0)$ et $v(0, 0, 1)$, déterminons un vecteur directeur de la droite E_{-2} :

$$E_{-2} = \ker(A_{-2} + 2I) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x, y, z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -x = -2x \\ x - 2y = -2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w(0, 1, -1)$. Ainsi, dans la base (u, v, w) la matrice est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Donnons les solutions du système différentiel $X' = A.X$.

Si on note $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où S une solution du système $Y' = DY$. Ainsi, la solution générale du système $X' = A.X$ s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ ae^{-t} + be^{-t} \\ be^{-t} + ce^{-2t} \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A .

La matrice A admet deux valeurs propres : -1 , valeur propre double et 0 , valeur propre simple. Le sous-espace propre E_{-1} , associé à la valeur propre -1 , est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$. Déterminons le sous-espace E_0 :

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x, y, z) \in E_0 \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 2y \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_0 est la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$. Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est le sous-espace propre E_0 . Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre double -1 c'est l'espace vectoriel $\ker(A + I)^2$. On a

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker(A + I)^2$ est le plan vectoriel d'équation $-x + y + 2z = 0$, engendré par les vecteurs $(1, 1, 0) \in E_{-1}$ et $(2, 0, 1)$.

2. Trigonalisons la matrice A .

Dans la base (u, v, w) où $u(2, 1, 1)$, $v(1, 1, 0)$ et $w(2, 0, 1)$ la matrice est triangulaire, il existe λ tel que $A.w = \lambda v - w$.

$$A.w = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$