



Sujets de l'année 2006-2007

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A , puis U_n en fonction de U_0 et de A .

[Correction ▼](#)

[002591]

Exercice 2

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n .

[Correction ▼](#)

[002592]

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f .
2. Déterminer les vecteurs propres de f .
3. Soit \vec{u} un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs \vec{v} et \vec{w} tels que

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$

- Soit \vec{v} un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Démontrer que $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^4 . Donner la matrice de f dans cette base.
- La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼

[002593]

2 Partiel

Exercice 4

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
- Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
- Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A .
- Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼

[002594]

Exercice 5

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A .
- On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A , E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathbb{R}^2 telle que $\vec{e}_1 \in E_1$, $\vec{e}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.
- Soit \vec{x} un vecteur de \mathbb{R}^2 , on note (α, β) ses coordonnées dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \vec{e}_1 + \beta \lambda_2^n \vec{e}_2$$

- Notons $A^n \vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . Exprimer a_n et b_n en fonction de α , β , λ_1 et λ_2 . En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
- Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

Correction ▼

[002595]

Exercice 6

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

- Démontrer que si \vec{x} est un vecteur propre de A de valeur propre λ , alors \vec{x} est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.

2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A .

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :

$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r).$$

- (a) Démontrer que

$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n).$$

- (b) En déduire que si μ est valeur propre de B , alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.

3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A , démontrer que

$$S_B = \{P(\lambda) / \lambda \in S_A\}.$$

4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme :

$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$

on note C la matrice $C = Q(A)$.

- (a) Démontrer que $S_C = \{0\}$.

- (b) En déduire que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.

[Correction ▼](#)

[002596]

3 Examen

Exercice 7

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

- Factoriser le polynôme caractéristique de A .
- Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
- Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

- Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
- Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
- Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

[Correction ▼](#)

[002597]

Exercice 8

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.

2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.

- Montrer que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.
- En déduire que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B .
- Déterminer toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$. Justifier.

3. Soit la matrice C ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.

4. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C .

5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C .

- Montrer que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.
- En déduire que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.
- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.

6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.

Correction ▼

[002598]

4 Rattrapage

Exercice 9

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1 .
- Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (justifier). Déterminer suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A (justifier).

Correction ▼

[002599]

Exercice 10

- Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur \mathbb{C} mais non diagonalisable sur \mathbb{R} (justifier).
- Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur \mathbb{C} , ni sur \mathbb{R} (justifier).

Exercice 11

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A .
2. Exprimer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et tracer ses trajectoires.

Exercice 12

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
3. Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Calculer $\exp B$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Calculons le polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = -X(1+a-X) + a = X^2 - (1+a)X + a.$$

La matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} si le polynôme P_A admet deux racines distinctes dans \mathbb{R} . En effet, si P_A admet une racine double r et A diagonalisable, alors l'endomorphisme de matrice A est égal à $r\text{Id}_E$, ce qui n'est pas le cas. Calculons donc le discriminant du polynôme caractéristique.

$$\Delta = (1+a)^2 - 4a = 1 + a^2 + 2a - 4a = 1 + a^2 - 2a = (1-a)^2.$$

Ainsi la matrice A est diagonalisable pour tout $a \neq 1$.

2. Lorsque A est diagonalisable, calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Déterminons les matrices P et D . Pour cela calculons les deux valeurs propres de A , ce sont les racines du polynôme P_A , on a donc

$$\lambda_1 = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$

Déterminons maintenant des vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et a . On cherche des vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 tels que $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ et $A\vec{e}_2 = a\vec{e}_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = ax$$

ainsi on peut choisir $\vec{e}_1 = (1, 1)$ et $\vec{e}_2 = (1, a)$. On a alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, on exprime U_{n+1} en fonction de U_n et de A , puis U_n en fonction de U_0 et de A .

On a, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$, ainsi,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n.$$

On a donc $U_1 = AU_0$, montrons par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$. C'est vrai pour $n = 0$, $U_0 = A^0 U_0 = I U_0 = U_0$ et pour $n = 1$. Soit n fixé pour lequel on suppose $U_n = A^n U_0$, on a alors $U^{n+1} = AU_n = A.A^n U_0 = A^{n+1} U_0$, le résultat est donc vrai pour tout entier naturel n .

La matrice A étant supposée diagonalisable, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0 = P D^n P^{-1} U_0 = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

ainsi on peut exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, le terme général de la suite u_n en fonction des premiers termes u_0 et u_1 , on a

$$u_n = \frac{1}{a-1} ((a-a^n)u_0 + (a^n-1)u_1).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Calculons son polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2 - 4X + 4) = (2-X)^3.$$

la matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2I_3$, elle serait donc égale à $2I_3$ ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

2. Calculons $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi, $(A - 2I_3)^0 = I$, $(A - 2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et, pour tout $n \geq 2$, on a $(A - 2I_3)^n = 0$.

On en déduit A^n

Notons $B = A - 2I_3$, on a $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ avec $B^n = 0$ pour $n \geq 2$. Par ailleurs, les matrices B et $2I_3$ commutent, ainsi

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme de Newton :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Or, pour $k \geq 2$, on a $B^k = 0$ d'où pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n A. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrons que 1 et 2 sont des valeurs propres de f .

Pour cela montrons que $\det(A - I) = 0$ et $\det(A - 2I) = 0$. On a

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 26 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Et

$$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, les réels 1 et 2 sont bien valeurs propres de la matrice A .

2. Déterminons des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et 2.

Soit $\vec{e} = (x, y, z, t)$ tel que $A\vec{e} = \vec{e}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} -9x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + 2y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 9z - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 26x + 7y + 9z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = 5y \\ t = 0 \end{cases},$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{e} = (-2, 1, 5, 0)$.

Soit $\vec{u} = (x, y, z, t)$ tel que $A\vec{u} = 2\vec{u}$, on résout

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -2x \\ 3z = -8x \\ t = 0 \end{cases},$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{u} = (3, -2, -8, 0)$.

3. On considère le vecteur \vec{u} précédent et on détermine des vecteurs \vec{v} et \vec{w} tels que

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$

Pour déterminer le vecteur $\vec{v} = (x, y, z, t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 3 \\ 6x + y + 2z - t = -2 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = -3 \\ 6x + y + 2z = -2, \\ t = 0 \end{cases}$$

le vecteur $\vec{v} = (0, 0, -1, 0)$ convient. Pour déterminer le vecteur $\vec{w} = (x, y, z, t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = -1 \\ 6x + y + 2z = -1, \\ t = -1 \end{cases}$$

le vecteur $\vec{w} = (1/2, 0, -2, -1)$ convient.

4. Les vecteurs $\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}$ et \vec{w} sont ceux définis précédemment. On démontre que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^4 et on donne la matrice de f dans cette base.

La matrice M des vecteurs $\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans la base canonique est de rang 4 car son déterminant est non nul, en effet

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Compte tenu des définitions des vecteurs $\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, la matrice B de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 1, valeur propre simple, et 2 de multiplicité 3. Nous avons vu dans le b) que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 \neq 3, ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A .

Soit P_A le polynôme caractéristique de A , on a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2 - 6X + 8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2. On démontre que A est diagonalisable et on détermine une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.

Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.

Notons $E_1 = \{\vec{V} = (x, y, z) / A\vec{V} = 2\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 2 est une droite vectorielle, dont un vecteur directeur est $\vec{e}_1 = (1, -2, 1)$.

Notons $E_2 = \{\vec{V} = (x, y, z) / A\vec{V} = 4\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel, d'équation

$z = -x$ dont une base est donnée, par exemple par les vecteurs $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et

$\vec{e}_3 = (1, 0, -1)$. Remarquons que l'on pouvait lire directement sur la matrice A , le fait que le vecteur \vec{e}_2 est vecteur propre associé à la valeur propre 4.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace \mathbb{R}^3 admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.

Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

3. On donne en le justifiant, mais sans calculs, le polynôme minimal de A .

La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal n'a que des racines simples, par ailleurs les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique. On a donc

$$Q_A(X) = (X - 2)(X - 4).$$

4. On calcule A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$, or

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

il nous reste à calculer P^{-1} . On sait que $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\tilde{P}$, d'où

$$\det P = -2, \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \cdot 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On calcule le polynôme caractéristique et on détermine les valeurs propres de A .

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1.$$

Calculons ses racines, le discriminant réduit de ce polynôme du second degré est égal à $\Delta' = (-1)^2 - (-1) = 2$, les racines sont donc

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = 1 - \sqrt{2},$$

ce sont les valeurs propres de A .

2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A , E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. On détermine une base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathbb{R}^2 telle que $\vec{e}_1 \in E_1$, $\vec{e}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.

On cherche $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A \cdot \vec{e}_1 = (1 + \sqrt{2})\vec{e}_1$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1 + y = 1 + \sqrt{2} \\ 2 + y = (1 + \sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y = \sqrt{2}$ et $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

On cherche $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A \cdot \vec{e}_2 = (1 - \sqrt{2})\vec{e}_2$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1 + y = 1 - \sqrt{2} \\ 2 + y = (1 - \sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y = -\sqrt{2}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. Soit \vec{x} un vecteur de \mathbb{R}^2 , on note (α, β) ses coordonnées dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . On démontre que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \vec{e}_1 + \beta \lambda_2^n \vec{e}_2.$$

On a $\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$, d'où, par linéarité $A\vec{x} = \alpha A\vec{e}_1 + \beta A\vec{e}_2$ et $A^n \vec{x} = \alpha A^n \vec{e}_1 + \beta A^n \vec{e}_2$. Or, on montre, par récurrence sur n , que $A^n \vec{e}_1 = \lambda_1^n \vec{e}_1$ et de même $A^n \vec{e}_2 = \lambda_2^n \vec{e}_2$. Pour $n = 1$, c'est la définition des vecteurs propres. Soit n fixé, tel que $A^n \vec{e}_1 = \lambda_1^n \vec{e}_1$, on a alors $A^{n+1} \vec{e}_1 = A.A^n \vec{e}_1 = \lambda_1^n A\vec{e}_1 = \lambda_1^{n+1} \vec{e}_1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n \vec{e}_1 = \lambda_1^n \vec{e}_1$, et, de même, $A^n \vec{e}_2 = \lambda_2^n \vec{e}_2$. D'où le résultat.

4. Notons $A^n \vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . On exprime a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2 et on en déduit que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente et les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 obtenus en 2) on a

$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta \lambda_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n \\ b_n = \sqrt{2}(\alpha \lambda_1^n - \beta \lambda_2^n) \end{cases}$$

On suppose $\alpha \neq 0$, pour n assez grand, on a

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2} \frac{\alpha \lambda_1^n - \beta \lambda_2^n}{\alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n},$$

or,

$$|\lambda_1| = |1 + \sqrt{2}| > 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^n = +\infty,$$

et

$$|\lambda_2| = |1 - \sqrt{2}| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_2^n = 0.$$

D'où l'équivalence

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2} \frac{\alpha \lambda_1^n - \beta \lambda_2^n}{\alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n} \sim \sqrt{2} \frac{\alpha \lambda_1^n}{\alpha \lambda_1^n} = \sqrt{2}.$$

On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}.$$

5. On explique, sans calcul, comment obtenir, à partir des questions précédentes, une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

La matrice A est à coefficients entiers, aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est à coefficients entiers. Si l'on choisit un vecteur \vec{x} à coordonnées entières dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , alors les coordonnées a_n et b_n du vecteur $A^n \vec{x}$ sont des entiers et elles nous fournissent une suite $\frac{b_n}{a_n}$ de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On démontre que si \vec{x} est un vecteur propre de A de valeur propre λ , alors \vec{x} est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.

Soit $\vec{x} \neq 0$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, notons $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d,$$

où I_n désigne la matrice unité.

Or, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k \vec{x} = \lambda^k \vec{x}$, d'où

$$B\vec{x} = P(A)\vec{x} = \sum_{k=0}^d a_k A^k \vec{x} = \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) \vec{x} = P(\lambda)\vec{x},$$

ce qui prouve que \vec{x} est un vecteur propre de la matrice $B = P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A .

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :

$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r).$$

- (a) On démontre que $\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n)$.

Compte tenu de la décomposition du polynôme $P(X) - \mu$, on a

$$P(A) - \mu I_n = a I_n (A - \alpha_1 I_n) \cdots (A - \alpha_r I_n)$$

d'où

$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n)$$

car le déterminant est une forme multilinéaire (d'où le a^n) et le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants.

- (b) On en déduit que si μ est valeur propre de B , alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.

Si μ est une valeur propre de B , alors, par définition, $\det(B - \mu I_n) = 0$, ainsi, compte tenu de la question précédente, il existe un α_i , $1 \leq i \leq r$, tel que $\det(A - \alpha_i I_n) = 0$, c'est-à-dire que l'un des α_i , $1 \leq i \leq r$, est valeur propre de A . Or, pour $1 \leq i \leq r$, $P(\alpha_i) - \mu = 0$ donc si μ est une valeur propre de B , on a $\mu = P(\alpha_i)$ où α_i est une valeur propre de A .

3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A . On démontre que

$$S_B = \{P(\lambda) / \lambda \in S_A\}.$$

Soit λ une valeur propre de A , on a démontré en 1) que $P(\lambda)$ est une valeur propre de B , ainsi $\{P(\lambda) / \lambda \in S_A\} \subset S_B$. Réciproquement, si μ est une valeur propre de B alors, d'après 2), il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$, ainsi on a $S_B \subset \{P(\lambda) / \lambda \in S_A\}$, d'où l'égalité des deux ensembles.

4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme

$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$

on note C la matrice $C = Q(A)$.

- (a) On démontre que $S_C = \{0\}$.

D'après la question précédente, on a $S_C = \{Q(\lambda) / \lambda \in S_A\}$. Or, par définition du polynôme $Q(X)$, on a $Q(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A , ainsi, $S_C = \{0\}$.

- (b) On en déduit que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.

Les valeurs propres de C sont les racines de son polynôme caractéristique, or C admet une unique valeur propre : 0, ainsi $P_C(X) = (-1)^n X^n$. Par ailleurs, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_C(C) = 0$, ainsi $(-1)^n C^n = 0$, donc $C^n = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. Factorisons le polynôme caractéristique de A .

Le polynôme caractéristique de A est le polynôme

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(X^2 - X + 1) - 1 \\ &= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = (1-X)^3 \end{aligned}$$

2. Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A .

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$, comme $A \neq I$, elle n'est pas diagonalisable. Son sous-espace caractéristique est égal à $\ker(A - I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. En effet, d'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire $(A - I_3)^3 = 0$. Son sous-espace propre est égal à $\ker(A - I_3)$.

$$\ker(A - I_3) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / A\vec{u} = \vec{u}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z = -y\}.$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$.

3. Démontrons qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Le vecteur \vec{u}_1 vérifie $A\vec{u}_1 = \vec{u}_1$, on cherche un vecteur $\vec{u}_2 = (x, y, z)$ tel que $A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

$$\begin{aligned} A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc $z - x = z + y = -1$, le vecteur $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$ convient. On cherche alors un vecteur $\vec{u}_3 = (x, y, z)$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

$$A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix}$$

on obtient alors $x + y = x - z = 1$. Le vecteur $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)$ convient. Ainsi, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la matrice de f est égale à B . La matrice P cherchée est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a bien $A = PBP^{-1}$ et $B = P^{-1}AP$.

4. *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N$$

Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice I_3 est diagonale, la matrice N est nilpotente, les matrices I_3 et N commutent, c'est donc bien la décomposition de Dunford de B .

5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons $\exp tB$.*

On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $tB = tI_3 + tN$, ainsi $\exp tB = \exp(tI_3 + tN) = (\exp tI_3)(\exp tN)$ car les matrices tI_3 et tN commutent. Par ailleurs, $\exp tI_3 = e^t I_3$ et $\exp tN = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$. On a donc

$$\exp tB = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Donnons les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*

Intégrons le système $Y' = BY$, sa solution générale s'écrit

$$Y(t) = (\exp tB)Y_0,$$

où Y_0 est un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Intégrons alors le système $X' = AX$. Remarquons que si PY est solution de $X' = AX$, on a

$$(PY)' = A(PY) \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = BY$$

ainsi Y est solution de $Y' = BY$, la solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} X(t) &= P(\exp tB)Y_0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & t+1 & t^2/2+t+1 \\ -1 & -t-1 & -t^2/2-t \\ 1 & t & t^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $Y_0 = (a, b, c)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 . Ou encore

$$\begin{cases} x(t) = e^t(a + b(t+1) + c(t^2/2 + t + 1)) \\ y(t) = e^t(-a - b(t+1) - c(t^2/2 + t)) \\ z(t) = e^t(a + bt + ct^2/2) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ -e^t(t+1) \\ te^t \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^t(t^2/2 + t + 1) \\ -e^t(t^2/2 + t) \\ e^t t^2/2 \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donnons sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.

La matrice A est diagonale dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3 = 3\vec{e}_3$. Les valeurs propres de A sont les réels 1, 2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées respectivement par \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .

2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.

(a) Montrons que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.

On suppose qu'il existe B telle que $A = \exp B$. On a alors, par définition,

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k, \text{ d'où } AB = BA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1}$$

(b) On en déduit que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B .

On a $(BA)\vec{e}_1 = B(A\vec{e}_1) = B\vec{e}_1$, mais $BA = AB$, on a donc $B\vec{e}_1 = (AB)\vec{e}_1 = A(B\vec{e}_1)$. Ce qui prouve que $B\vec{e}_1$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il est donc colinéaire à \vec{e}_1 , ainsi, \vec{e}_1 est bien un vecteur propre de B . De même, $BA\vec{e}_2 = 2B\vec{e}_2 = AB\vec{e}_2$ donc $B\vec{e}_2$ est colinéaire à \vec{e}_2 et \vec{e}_2 est un vecteur propre de B . Et aussi, $BA\vec{e}_3 = 3B\vec{e}_3 = AB\vec{e}_3$ d'où $B\vec{e}_3$ colinéaire à \vec{e}_3 et \vec{e}_3 vecteur propre de B .

(c) Déterminons les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ étant vecteurs propres de B , la matrice B est diagonale dans la base canonique, il existe donc des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ ainsi } \exp B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui implique $e^{\lambda_1} = 1$, $e^{\lambda_2} = 2$ et $e^{\lambda_3} = 3$ et donc $\lambda_1 = \ln 1 = 0$, $\lambda_2 = \ln 2$ et $\lambda_3 = \ln 3$ d'où l'existence d'une unique matrice B telle que $\exp B = A$, c'est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice C ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.

Quelque soit la matrice D , la matrice $\exp D$ est inversible d'inverse $\exp(-D)$, or, il est clair que la matrice C n'est pas inversible, son déterminant est nul, ainsi, il n'existe pas de matrice D telle que $C = \exp D$.

4. Calculons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C .

Soit $P_C(X)$ le polynôme caractéristique de C , on a

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3.$$

Le polynôme minimal Q_C de C est unitaire, divise son polynôme caractéristique P_C et s'annule en C , or

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ mais } C^3 = 0, \text{ d'où } Q_C(X) = X^3.$$

5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C .

(a) Montrons que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.

On a $Q_C(C) = Q_C(E^2) = 0$, ainsi le polynôme $S(X) = Q_C(X^2)$ s'annule en E , ce qui prouve que $Q_E(X)$, polynôme minimal de E , divise $Q_C(X^2)$.

(b) On en déduit que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.

Le polynôme minimal de E divise $Q_C(X^2) = -X^6$, or son degré est inférieur ou égal à 3, par ailleurs on suppose $E^2 = C$ donc $E^2 \neq 0$ ainsi, on a bien $Q_E(X) = X^3$ et $E^3 = 0$, or, $E^3 = 0$ implique $E^4 = 0$ et, comme $E^4 = C^2$, on a $C^2 = 0$.

(c) On déduit de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.

Si une telle matrice existe, alors on a vu qu'elle vérifie $E^3 = 0$, ainsi on a $E^4 = 0$, or $E^4 = C^2 \neq 0$, d'où la conclusion.

6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.

Soit $F = \exp G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H = \exp \frac{1}{n}G$, on a

$$H^n = \left(\exp \frac{1}{n}G \right)^n = \exp \frac{n}{n}G = \exp G = F.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factorisons le polynôme caractéristique de A et montrons que les valeurs propres de A sont -1 et 1 . (1,5 points)

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= (-X-1) \begin{vmatrix} 1+m-X & m \\ -m & 1-m-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X) \left((1-X)^2 - m^2 + m^2 \right) \\ &= -(1+X)(1-X)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont -1 , valeur propre simple, et 1 , valeur propre double.

2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (1,5 points)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Déterminons donc ce sous-espace propre $E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = \vec{u}\}$.

$$\begin{aligned} A\vec{u} = \vec{u} &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (1+m)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2mx + 2my = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ m(x+y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace E_1 est de dimension 2 si et seulement si $m = 0$, c'est alors le plan d'équation $y + z = 0$, sinon c'est une droite, intersection des deux plans $y + z = 0$ et $x + y = 0$.

Déterminons suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A . (1 point)

Si $m = 0$, la matrice A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, il est égal à

$$Q(X) = (X - 1)(X + 1).$$

Si $m \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut pas avoir uniquement des racines simples, il est donc égal à

$$Q(X) = (X - 1)^2(X + 1).$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur \mathbb{C} mais non diagonalisable sur \mathbb{R} . (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$$

Le polynôme caractéristique de A admet deux racines complexes conjuguées distinctes i et $-i$ elle est donc diagonalisable sur \mathbb{C} mais elle ne l'est pas sur \mathbb{R} .

2. Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur \mathbb{C} , ni sur \mathbb{R} . (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$

Le polynôme caractéristique de A admet une racine double 1, la matrice A admet l'unique valeur propre 1, or, elle n'est pas égale à l'identité, par conséquent, elle n'est diagonalisable, ni sur \mathbb{C} , ni sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Diagonalisons la matrice A.* (2 points)

Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Déterminons une base de vecteurs propres de A .

Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A\vec{u} = \vec{u} \iff x = y \text{ et } A\vec{u} = -\vec{u} \iff x = -y.$$

Notons $\vec{u}_1 = (1, 1)$ et $\vec{u}_2 = (-1, 1)$, le vecteur \vec{u}_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et le vecteur \vec{u}_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 , ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de \mathbb{R}^2 . Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Exprimons les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et traçons ses trajectoires.* (3 points)

Soit Y tel que $PY = X$, on a alors

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans la base de vecteurs propres (\vec{u}_1, \vec{u}_2) sont les solutions du système $Y' = DY$. Si $Y = (x, y)$, on a $x'(t) = x(t)$ et $y'(t) = -y(t)$, ainsi, les solutions du système sont $x(t) = ae^t$ et $y(t) = be^{-t}$ où a et b sont des constantes réelles arbitraires. Les trajectoires, exprimées dans la base de vecteurs propres (\vec{u}_1, \vec{u}_2) , sont donc les courbes d'équation $y = c/x$ avec $c \in \mathbb{R}$, ce sont des branches d'hyperboles.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1. *Factorisons le polynôme caractéristique de A.* (1 point)

On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)(X^2 - 4X + 4) = -(X+1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = -1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.

2. Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A . (2 points)

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le sous-espace vectoriel E_{-1} défini par

$$E_{-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = -\vec{u}\}.$$

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par

$$\vec{u}_1 = (1, 0, -1).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel E_2 défini par

$$E_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3, A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_2 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par

$$\vec{u}_2 = (2, 1, -1).$$

Le sous-espace E_2 étant de dimension 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Le sous-espace caractéristique N_{-1} associé à la valeur propre -1 est égal au sous-espace propre E_{-1} . Le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est égal à

$$N_2 = \ker(A - 2I)^2.$$

Déterminons-le

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

D'où $\ker(A - 2I)^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2z = 0\}$, c'est le plan vectoriel d'équation $x + 2z = 0$.

3. Démontrons qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est (1 point)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 et 2 conviennent pour les deux premiers vecteurs de la base recherchée, on va alors chercher un vecteur $\vec{u}_3 \in \ker(A - 2I)^2$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, notons $\vec{u}_3 = (-2z, y, z)$, on détermine y et z tels que

$$\begin{pmatrix} 2y - 2z \\ 3y + z \\ -y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

on obtient $y + z = 1$, le vecteur $\vec{u}_3 = (0, 1, 0)$ convient.

Trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. (1 point)

La matrice de passage P qui exprime la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 répond à la question,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.* (1 point)

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N,$$

la matrice D est diagonale, la matrice N est nilpotente, $N^2 = 0$, et $ND = DN$, c'est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B .

5. *Calculons $\exp B$.* (1 point)

Compte tenu de la question précédente, on a $B = N + D$, avec $DN = ND$, ainsi $\exp B = \exp D \exp N$, or

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp B = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$
