Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Sujets de l'année 2004-2005

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002563]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur, calculer $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ et $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.
2. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. En déduire que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de p est égal à la trace de p. (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

Correction ▼ [002564]

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrer le résultat pour $n = 2$.
2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geqslant 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne
$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$
Calculer les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrer que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geqslant 2$, on a
$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} |b_{ij}|.$$
3. Démontrer le résultat de Hadamard pour n quelconque.

Correction ▼ [002565]

2 Partiel

Exercice 4

Soit
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$
Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002566]

Exercice 5

Soit
$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$
Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Correction ▼ [002567]

Exercice 6

Soit
$$A=\begin{pmatrix}a&c\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$
Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002568]

Exercice 7

Soit A la matrice suivante
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$
Calculer A^2 et vérifier que $A^2=A+2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Correction ▼ [002569]

Exercice 8

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda\neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Correction ▼ [002570]

Exercice 9

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2=\text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. Vérifier que pour tout $\vec{x}\in E$, on a
$$f(\vec{x}-f(\vec{x}))=-(\vec{x}-f(\vec{x}))\ \text{ et }\ f(\vec{x}+f(\vec{x}))=(\vec{x}+f(\vec{x}))$$
et en déduire que f admet toujours une valeur propre.

3. Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.
4. Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n=2$.

Correction ▼ [002571]

3 Examen

Exercice 10

(*9 points*) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   En déduire la décomposition de Dunford de B.
5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'=x+z\\ y'=-x+2y+z\\ z'=x-y+z\end{cases}$$

[002572]

Exercice 11

(*7 points*) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n\geqslant 1$ on ait

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}.$$

   Justifier.
2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X)=a_nX+b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n=a_nA+b_nI_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

[002573]

Exercice 12

(*5 points*) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\mathrm{trA}}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

4 Rattrapage

Exercice 13

(*7 points*) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$
Justifier.
2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_nA + b_nI_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 14

(*5 points*) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\mathrm{trA}}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

Exercice 15

(*4 points*) On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Exprimer le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
3. Représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy).
4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼ [002575]

Exercice 16

(*9 points*) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - mathrmId$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.
   (d) Retrouver A^n.

Correction ▼ [002576]

Exercice 17

(*7 points*) Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ, montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :
$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j).$$
   En déduire que le système suivant
$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \quad \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$
   admet une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction ▼ [002577]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

1. *Déterminons les valeurs propres de M.*

   Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}P_M(X)=\begin{vmatrix}-X&2&-1\\3&-2-X&0\\-2&2&1-X\end{vmatrix}&=-1\begin{vmatrix}3&-2-X\\-2&2\end{vmatrix}+(1-X)\begin{vmatrix}-X&2\\3&-2-2X\end{vmatrix} &(1)\\ &=(1-X)(X^2+2X-8) &(2)\\ &=(1-X)(X+4)(X-2). &(3)\end{aligned}$$

   La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1,2$, et -4.

2. *Montrons que M est diagonalisable.*

   Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*

   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

   $\lambda=1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases}2y-z=x\\3x-2y=y\\-2x+2y+z=z\end{cases}\iff\begin{cases}-x+2y-z=0\\3x-3y=0\\-2x+2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\x=z\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1,1,1)$.

   $\lambda=2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases}-2x+2y-z=0\\3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4,3,-2)$.

   $\lambda=-4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases}-4x+2y-z=0\\3x+2y=0\\-2x+2y+5z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x-z=0\\2y+3x=0\end{cases}$$

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=-4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2,-3,2)$.

   Les vecteurs $\vec{e_1},\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

4. *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*
On a
$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
pour $k \in \mathbb{N}$, on a
$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$
et $M^k = PD^kP^{-1}$.
Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^t$. Or
$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$
et
$$\mathrm{com} P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
d'où
$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5.2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5.2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. *Montrons que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur et calculons $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ et $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.*
On a $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p$, car $p^2 = p$, ce qui prouve que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
Par ailleurs, on a
$$p \circ (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\mathrm{Id}_E - p) \circ p$$
donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{0}$.
2. *Montrons que pour tout $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.*
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$, on a donc $p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.
3. *On en déduit que $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.*
Soit $\vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, considérons $\vec{x} - p(\vec{x})$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = 0$ ce qui prouve que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$. Ainsi tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de $\mathrm{Im}\, p$, $p(\vec{x})$, et d'un élément de $\ker p$, $\vec{x} - p(\vec{x})$, il nous reste à démontrer que la somme est directe.
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p \cap \ker p$, on a, d'une part $p(\vec{x}) = \vec{x}$ d'après la question 2) car $\vec{x} \in \mathrm{Im}\, p$ et, d'autre part $p(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker p$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc
$$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p.$$
(Sachant que $\dim E = \dim \ker p + \dim \mathrm{Im}\, p$, on pouvait se contenter de démontrer que $\mathrm{Im}\, p \cap \ker p = \vec{0}$, ici nous avons explicitement la décomposition.)

4. *Montrons que le rang de p est égal à la trace de p.*
   Notons n la dimension de E et considérons une base de E de la forme

$$(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k}, \vec{e_{k+1}}, \cdots, \vec{e_n})$$

   où $(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k})$ est une base de $\operatorname{Im} p$ et $(\vec{e_{k+1}}, \cdots, \vec{e_n})$ une base de $\ker p$. dans une telle base, la matrice de p s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où I_k désigne la matrice identité $k \times k$, et les 0 des blocs de zéros. Le rang de p est égal à la dimension de $\operatorname{Im} p$ c'est-à-dire ici à k et on a bien $k = \operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr} p$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. *Montrons le résultat pour $n = 2$.*
   Dans ce cas, la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

   et les hypothèses deviennent

$$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ et } |a_{22}| > |a_{21}|.$$

   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

   et, compte tenu des hypothèses,

$$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$

   ainsi$|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$ donc $a_{12}a_{21} \neq a_{12}a_{21}$ et le déterminant est non nul.

2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geqslant 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

   Calculons les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrons que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geqslant 2$, on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} |b_{ij}|.$$

   On a

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a \quad {}_{i1}} \quad \text{si} \quad j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad b_{i1} = a_{i1}.$$

   par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq i} |b_{ij}| &= \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}| \\ &\leqslant \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}||a_{11}|}{|} a_{i1}| \\ &= \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{\sum} {}_{j=2, j \neq i} |a_{1j}|. \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, pour $i = 1$, on a

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

donc

$$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2, j\neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{1i}|} \\
&= \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{1i}|} \\
&< |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{1i}|} \\
&\leqslant \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{11}}{a_{1i}} \right| = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

3. *Démontrons le résultat de Hadamard pour n quelconque.*
   Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$, vérifiant pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

   On veut démontrer que A est inversible.
   Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question 1). Soit n arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour $n-1$ et démontrons le pour n.
   On a $\det A = \det B$ où B est la matrice construite dans la question 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & (b_{ij(2\leqslant i,j\leqslant n)}) & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

   Or, la matrice $(b_{ij(2\leqslant i,j\leqslant n)})$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice A est inversible car $a_{11} \neq 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.
Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.

$E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base.
Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.
$E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est une base.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(X^2-2X+2)$$

factorisons maintenant le polynôme $X^2 - 2X + 2$, le discriminant réduit $\Delta' = 1 - 2 = -1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1+i$ et $1-i$. On a $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.
La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2)\\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2\\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2\\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a - d = 0$ et $c = 0$, mais, si $c = 0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculons A^2 et vérifions que $A^2 = A + 2I_3$. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

On a donc $A^2 - A = 2I_3$, c'est-à-dire $A(A - I_3) = 2I_3$, ou encore $A.\frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Ce qui prouve que A est in versible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. *Démontrons que $\lambda \neq 0$.* Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.
2. *Démontrons que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .*
   Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.*
   Si λ est une valeur propre de f, il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On a donc
   $$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$
   Mais, $f^2 = \text{mathrmId}_E$ donc si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a
   $$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$
   d'où $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. *Vérifions que pour tout $\vec{x} \in E$, on a*
   $$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \;\text{ et }\; f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$
   Soit $\vec{x} \in E$, on a
   $$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et

$$f(\vec{x}+f(\vec{x}))=f(\vec{x})+f^2(\vec{x})=f(\vec{x})+\vec{x}$$

Nous allons en déduire que f admet toujours une valeur propre.

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f, alors, $\vec{x}=f(\vec{x})\Rightarrow\vec{x}=\vec{0}$. Or, pour tout $\vec{x}\in E$, on a $f(\vec{x}+f(\vec{x}))=f(\vec{x})+\vec{x}$, donc pour tout $\vec{x}\in E$, on a $f(\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$, c'est-à-dire, $f(\vec{x})=-\vec{x}$. Ce qui prouve que -1 est valeur propre de f. On a même dans ce cas $f=-\text{mathrmId}_{\text{E}}$.

Si -1 n'est pas valeur propre de f, on montre par un raisonnement analogue que pour tout $\vec{x}\in E$ on a $f(\vec{x})-\vec{x}=\vec{0}$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de f, et dans ce cas $f=\text{mathrmId}_{\text{E}}$.

3. *Démontrons que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*

   Supposons maintenant que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Ce sont alors les seules et on a, pour tout $\vec{x}\in E$,
$$\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{x}+f(\vec{x}))+\frac{1}{2}(\vec{x}-f(\vec{x}))$$
   Et, quelque soit $\vec{x}\in E$, $f(\vec{x}-f(\vec{x}))=-(\vec{x}-f(\vec{x}))$ et $f(\vec{x}+f(\vec{x}))=(\vec{x}+f(\vec{x}))$, c'est-à-dire $\vec{x}+f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et $\vec{x}-f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{x}=-\vec{x}$, donc réduite au vecteur nul). par conséquent E est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et -1.

4. *Traduisons géométriquement le cas $n=2$.*

   Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre, f est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et -1 sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit u un vecteur propre tel que $f(u)=u$ et v un vecteur propre tel que $f(v)=-v$, alors si $w=au+bv$, $f(w)=au-bv$.

Correction de l'exercice 15 ▲

On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S)\quad\begin{cases}x'=4x-2y\\ y'=x+y\end{cases}$$

1. On diagonalise la matrice
$$A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}.$$
   Pour cela on détermine ses valeurs propres :
$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$$
   Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=3$. Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :
$$\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\iff x=y,$$
   d'où le vecteur propre $u_1=(1,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_1=2$.
$$\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\iff x=2y,$$
   d'où le vecteur propre $u_2=(2,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_2=3$. Dans la base (u_1,u_2), la matrice s'écrit
$$A'=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

On a $A = PA'P^{-1}$ où
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimons le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
Dans la base (u_1, u_2), le système (S) devient
$$(S') \quad \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$
Ses solutions sont les fonctions
$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$
3. Pour représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy), on trace d'abord le repère (O, u_1, u_2) dans le repère $(0xy)$, puis, on trace les courbes
$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$
dans le repère (O, u_1, u_2) (ou OXY).
4. On voit sur le dessin que si $Y(0)$ est strictement positif, alors la population des lapins, $x(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $Y(0)$ est strictement négatif alors la populations des lapins s'éteint dans la mesure ou $x(t)$ dans ce cas tendrait vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de A.
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$
La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.
2. Calculons $(A - I)^2$.
$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrons que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1-n)I.$$
Car, pour $k \geqslant 2$, on a $(A - I)^k = 0$.
3. *Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.*
Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.

Il existe des polynômes S et R, avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R = 0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a + b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

4. (a) Montrons que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A - I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in Im(A-I), \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $Im(A-I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2,-1,1)$.

(b) Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x,y,z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = x + 2 \\ -x + z = y - 1 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y-z) = 2 \\ -1(x+y-z) = -1 \\ (x+y-z) = +1 \end{cases} \iff x + y - z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1,0,0)$.

Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \iff x + y - z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0,1,1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2.

(c) Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.

On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour retrouver A^n, on écrit $A' = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^2 = 0$. Par ailleurs, on a $A = PA'P^{-1}$, d'où

$$A^n = PA'^n P^{-1} = P(I+N)^n P^{-1} = P(I+nN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. *Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ.*
   Montrons que $MAx = \lambda Ax$.
   On a $Mx = \lambda x$, donc $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$. Mais, $AM = MA$, donc $MAx = AMx = \lambda Ax$. Ce qui prouve que le vecteur Ax est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ, et comme les valeurs propres de M sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc Ax est colinéaire à x. Ainsi, il existe un réel μ tel que $Ax = \mu x$, donc x est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Dans $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, retranchons à chaque colonne λ_1 fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

$$\begin{vmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par $(\lambda_i - \lambda_1)$ et on obtient

$$V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$$

car $V(\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)$ par hypothèse de récurrence.
Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \quad\vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or $V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq 0$ puisque les λ_i sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes* :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices A' et M' l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.
On en déduit qu'il existe des réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$

La matrice M admet n vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice A. Par conséquent il existe une même matrice de passage P telle que $M = PM'P^{-1}$ et $A = PA'P^{-1}$, d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M^k.$$