



Sujets de l'année 2004-2005

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M .
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k , puis calculer M^k .

[Correction ▼](#)

[002563]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. Montrer que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur, calculer $p \circ (\text{Id}_E - p)$ et $(\text{Id}_E - p) \circ p$.
2. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \text{Im } p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. En déduire que $\text{Im } p$ et $\text{ker } p$ sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de p est égal à la trace de p . (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

[Correction ▼](#)

[002564]

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrer le résultat pour $n = 2$.
2. Soit B , la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

Calculer les b_{ij} en fonction des a_{ij} . Montrer que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geq 2$, on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |b_{ij}|.$$

3. Démontrer le résultat de Hadamard pour n quelconque.

[Correction ▼](#)

[002565]

2 Partiel

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

[Correction ▼](#)

[002566]

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? dans \mathbb{C} ?

[Correction ▼](#)

[002567]

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

[Correction ▼](#)

[002568]

Exercice 7

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A .

[Correction ▼](#)

[002569]

Exercice 8

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A .

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si \vec{x} est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

[Correction ▼](#)

[002570]

Exercice 9

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1 .

2. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \quad \text{et} \quad f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

et en déduire que f admet toujours une valeur propre.

- Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.
- Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n = 2$.

Correction ▼

[002571]

3 Examen

Exercice 10

(9 points) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
- Déterminer les sous-espaces propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A .
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la décomposition de Dunford de B .

- Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

[002572]

Exercice 11

(7 points) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

- Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

- Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2 .
- Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).

4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 12

(5 points) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}A$.

Démontrer que $\det(\exp A) = e^{\text{tr}A}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

4 Rattrapage

Exercice 13

(7 points) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2 .
3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 14

(5 points) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}A$.

Démontrer que $\det(\exp A) = e^{\text{tr}A}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

Exercice 15

(4 points) On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimer le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A .

3. Représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy) .

4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼

[002575]

Exercice 16

(9 points) Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A . L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2. Calculer $(A - I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1 - n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

3. Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q . En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q , retrouver A^n .

4. (a) Montrer que l'image de \mathbb{R}^3 par l'endomorphisme $u - \text{Id}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.

(b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2 .

(c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.

(d) Retrouver A^n .

Correction ▼

[002576]

Exercice 17

(7 points) Soient M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ , montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A .

2. On note maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et μ_1, \dots, μ_n celles de A .

(a) Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

En déduire que le système suivant

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons les valeurs propres de M .

Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= (1-X)(X^2 + 2X - 8) \quad (2)$$

$$= (1-X)(X+4)(X-2). \quad (3)$$

La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : 1, 2, et -4 .

2. Montrons que M est diagonalisable.

Nous venons de voir que M , matrice réelle 3×3 , admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$\lambda = 1$: Le vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{e}_1 de coordonnées $(1, 1, 1)$.

$\lambda = 2$: Le vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{e}_2 de coordonnées $(4, 3, -2)$.

$\lambda = -4$: Le vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{e}_3 de coordonnées $(2, -3, 2)$.

Les vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Exprimons M^k en fonction de D^k , puis calculons M^k .

On a

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

et $M^k = PD^kP^{-1}$.

Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\text{com}P)^t$. Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

et

$$\text{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15 \cdot 2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5 \cdot 2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5 \cdot 2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

1. Montrons que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur et calculons $p \circ (\text{Id}_E - p)$ et $(\text{Id}_E - p) \circ p$.

On a $(\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p^2 = \text{Id}_E - p$, car $p^2 = p$, ce qui prouve que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur.

Par ailleurs, on a

$$p \circ (\text{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\text{Id}_E - p) \circ p$$

donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{0}$.

2. Montrons que pour tout $\vec{x} \in \text{Im } p$, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Soit $\vec{x} \in \text{Im } p$, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$, on a donc $p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.

3. On en déduit que $\text{Im } p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.

Soit $\vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, considérons $\vec{x} - p(\vec{x})$, on a $p(\vec{x} - p(\vec{x})) = 0$

ce qui prouve que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \ker p$. Ainsi tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de $\text{Im } p$, $p(\vec{x})$, et d'un élément de $\ker p$, $\vec{x} - p(\vec{x})$, il nous reste à démontrer que la somme est directe.

Soit $\vec{x} \in \text{Im } p \cap \ker p$, on a, d'une part $p(\vec{x}) = \vec{x}$ d'après la question 2) car $\vec{x} \in \text{Im } p$ et, d'autre part $p(\vec{x}) = \vec{0}$ car $\vec{x} \in \ker p$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc

$$E = \text{Im } p \oplus \ker p.$$

(Sachant que $\dim E = \dim \ker p + \dim \text{Im } p$, on pouvait se contenter de démontrer que $\text{Im } p \cap \ker p = \vec{0}$, ici nous avons explicitement la décomposition.)

4. Montrons que le rang de p est égal à la trace de p .

Notons n la dimension de E et considérons une base de E de la forme

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$$

où $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ est une base de $\text{Im } p$ et $(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $\text{ker } p$. dans une telle base, la matrice de p s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_k désigne la matrice identité $k \times k$, et les 0 des blocs de zéros. Le rang de p est égal à la dimension de $\text{Im } p$ c'est-à-dire ici à k et on a bien $k = \text{Tr}M = \text{Tr}p$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrons le résultat pour $n = 2$.

Dans ce cas, la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et les hypothèses deviennent

$$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ et } |a_{22}| > |a_{21}|.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

et, compte tenu des hypothèses,

$$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$

ainsi $|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$ donc $a_{12}a_{21} \neq a_{11}a_{22}$ et le déterminant est non nul.

2. Soit B , la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geq 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}}c_1,$$

Calculons les b_{ij} en fonction des a_{ij} . Montrons que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geq 2$, on a

$$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |b_{ij}|.$$

On a

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a_{11}} \text{ si } j \geq 2 \text{ et } b_{i1} = a_{i1}.$$

par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq i} |b_{ij}| &= \sum_{j=2, j \neq i} \left| a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} \right| \\ &\leq \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}||a_{i1}|}{|a_{11}|} \\ &= \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{\sum_{j=2, j \neq i} |a_{1j}|} |a_{1j}|. \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, pour $i = 1$, on a

$$\sum_{j=2}^n |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

donc

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2, j \neq i} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &= \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &< |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\ &\leq \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{11}}{a_{11}} \right| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

3. *Démontrons le résultat de Hadamard pour n quelconque.*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$, vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

On veut démontrer que A est inversible.

Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question 1). Soit n arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour $n - 1$ et démontrons le pour n .

On a $\det A = \det B$ où B est la matrice construite dans la question 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (b_{ij}_{(2 \leq i, j \leq n)}) & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

Or, la matrice $(b_{ij}_{(2 \leq i, j \leq n)})$ est une matrice carrée d'ordre $n - 1$ qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice A est inversible car $a_{11} \neq 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.

Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.

$$E_1 = \{V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = V\},$$

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \iff x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ forment une base.

Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.

$$E_2 = \{V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A.V = 2V\},$$

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \iff x = 0, y = 0 \\ x - y + 2z = 2z \end{cases}$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0, 0, 1)$ est une base.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de A .

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2 + 1) = (1-X)(X^2 - 2X + 2)$$

factorisons maintenant le polynôme $X^2 - 2X + 2$, le discriminant réduit $\Delta' = 1 - 2 = -1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1 + i$ et $1 - i$. On a $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.

La matrice A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans \mathbb{R} , elle est diagonalisable dans \mathbb{C} car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons A^2 et vérifions que $A^2 = A + 2I_3$. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

On a donc $A^2 - A = 2I_3$, c'est-à-dire $A(A - I_3) = 2I_3$, ou encore $A \cdot \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Ce qui prouve que A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A .

1. *Démontrons que $\lambda \neq 0$.* Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A , alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.
2. *Démontrons que si \vec{x} est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .*

Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que \vec{x} est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1 .*

Si λ est une valeur propre de f , il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On a donc

$$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

Mais, $f^2 = \text{mathrmId}_E$ donc si \vec{x} est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a

$$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$

d'où $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}), $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1 .

2. *Vérifions que pour tout $\vec{x} \in E$, on a*

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \quad \text{et} \quad f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

Soit $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et

$$f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{x}$$

Nous allons en déduire que f admet toujours une valeur propre.

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f , alors, $\vec{x} = f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Or, pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + \vec{x}$, donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$. Ce qui prouve que -1 est valeur propre de f . On a même dans ce cas $f = -\text{Id}_E$.

Si -1 n'est pas valeur propre de f , on montre par un raisonnement analogue que pour tout $\vec{x} \in E$ on a $f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de f , et dans ce cas $f = \text{Id}_E$.

3. *Démontrons que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*

Supposons maintenant que 1 et -1 sont valeurs propres de f . Ce sont alors les seules et on a, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + f(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

Et, quelque soit $\vec{x} \in E$, $f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$ et $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$, c'est-à-dire $\vec{x} + f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et $\vec{x} - f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 . Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs \vec{x} tels que $\vec{x} = -\vec{x}$, donc réduite au vecteur nul). par conséquent E est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et -1 .

4. *Traduisons géométriquement le cas $n = 2$.*

Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre, f est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et -1 sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit u un vecteur propre tel que $f(u) = u$ et v un vecteur propre tel que $f(v) = -v$, alors si $w = au + bv$, $f(w) = au - bv$.

Correction de l'exercice 15 ▲

On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. On diagonalise la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela on détermine ses valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff x = y,$$

d'où le vecteur propre $u_1 = (1, 1)$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff x = 2y,$$

d'où le vecteur propre $u_2 = (2, 1)$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$. Dans la base (u_1, u_2) , la matrice s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PA'P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Exprimons le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A .

Dans la base (u_1, u_2) , le système (S) devient

$$(S') \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$

Ses solutions sont les fonctions

$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$

3. Pour représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy) , on trace d'abord le repère (O, u_1, u_2) dans le repère (Oxy) , puis, on trace les courbes

$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$

dans le repère (O, u_1, u_2) (ou OXY).

4. On voit sur le dessin que si $Y(0)$ est strictement positif, alors la population des lapins, $x(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $Y(0)$ est strictement négatif alors la population des lapins s'éteint dans la mesure où $x(t)$ dans ce cas tendrait vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$

La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.

2. Calculons $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $A^n = nA + (1 - n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (A - I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I.$$

Car, pour $k \geq 2$, on a $(A - I)^k = 0$.

3. Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q .

Il existe des polynômes S et R , avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R = 0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X - 1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X - 1)^2 + 2(X - 1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a + b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1 - n)I.$$

4. (a) Montrons que l'image de \mathbb{R}^3 par l'endomorphisme $(A - I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X, Y, Z) \in \text{Im}(A - I), \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x + y - z) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $\text{Im}(A - I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2, -1, 1)$.

- (b) Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x, y, z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = x + 2 \\ -x + z = y - 1 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x + y - z) = 2 \\ -1(x + y - z) = -1 \\ (x + y - z) = +1 \end{cases} \iff x + y - z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1, 0, 0)$.

Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2 .

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \iff x + y - z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2 .

- (c) Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.

On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour retrouver A^n , on écrit $A' = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^2 = 0$. Par ailleurs, on a $A = PA'P^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} A^n &= PA'^n P^{-1} = P(I + N)^n P^{-1} = P(I + nN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ .

Montrons que $MAx = \lambda Ax$.

On a $Mx = \lambda x$, donc $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$. Mais, $AM = MA$, donc $MAx = AMx = \lambda Ax$. Ce qui prouve que le vecteur Ax est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ , et comme les valeurs propres de M sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc Ax est colinéaire à x . Ainsi, il existe un réel μ tel que $Ax = \mu x$, donc x est un vecteur propre de A .

2. On note maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et μ_1, \dots, μ_n celles de A .

(a) Montrons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur n . Pour $n = 2$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$. Dans $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, retranchons à chaque colonne λ_1 fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1 \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1 \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1 \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1 \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par $(\lambda_i - \lambda_1)$ et on obtient

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

car $V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ par hypothèse de récurrence.

Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ puisque les λ_i sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices A' et M' l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.

On en déduit qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

La matrice M admet n vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice A . Par conséquent il existe une même matrice de passage P telle que $M = PM'P^{-1}$ et $A = PA'P^{-1}$, d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$