Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Différentielles secondes, extremums

Exercice 1

Calculez $D^2f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f \in L(E,G)$ continue
2. $f : E \times F \to G$, bilinéaire continue.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$

Correction ▼ [002553]

Exercice 2

Etudier les extrémas locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$
2. $f(x,y) = x^2y - x^2/2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
4. $f(x,y) = \sin^2 x - \operatorname{sh}^2 y$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3$
6. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

Correction ▼ [002554]

Exercice 3

Trouver le volume maximum d'une boite rectangulaire inscrite dans la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Correction ▼ [002555]

Exercice 4

Déterminez le parallélipipède rectangle de volume V donné dont la surface totale est minimale. [002556]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Calculons l'accroissement :

$$f(x+h)-f(x)=f(x)+f(h)-f(x)=f(h)+0.$$

Or, par définition $f(h)$ est linéaire en h, continue et $0=o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et

$$Df(x)=f,\ \text{ou encore } Df(x).h=f(h).$$

On remarque que Df est l'application constante que à $x\in E$ associe l'application linéaire f. Par conséquent, Df est différentiable et sa différentielle est nulle :

$$D^2f=0.$$

2. Calculons

$$f((x,y)+(h,k))-f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x,y)=f(x,y+k)+f(h,y+k)-f(x,y)=$$

$$f(x,y)+f(x,k)+f(h,y)+f(h,k)-f(x,y)=f(x,k)+f(h,y)+f(h,k).$$

L'application qui à (x,y) associe l'application linéaire $Df(x,y)(h,k)=f(x,k)+f(h,y)$ est donc candidate pour être la différentielle de f. Vérifions qu'elle est bien continue et que $f(h,k)=o(||(h,k)||)$. Nous rappelons qu'une application bilinéaire $f(x,y)$ est continue s'il existe $M>0$ tel que

$$\forall(x,y)\in E^2;||f(x,y)||\leqslant M||x||||y||.$$

On a

$$||Df(x,y)(h,k)||=||f(x,k)+f(h,y)||\leqslant||f(x,k)||+||f(h,y)||\leqslant$$

$$M||x||.||k||+M||h||.||y||\leqslant M(||x||+||y||)\max(||k||,||h||)\leqslant M(||x||+||y||)||(h,k)||.$$

Par conséquent, $Df(x,y)$ est continue et a une norme inférieure à $M(||x||+||y||)$. De plus

$$||f(h,k)||\leqslant M||h||.||k||\leqslant||(h,k)||.\varepsilon(h,k)$$

où ε tend vers zero quand (h,k) tend vers zero car

$$\varepsilon(h,k)=\frac{||h||.||k||}{\sup(||h||,||k||)}$$

ce qui fini de montrer que f est différentiable et que sa différentielle est définie par

$$Df(x,y).(h,k)=f(x,k)+f(h,y).$$

En remarquant que Df est linéaire par rapport à (x,y), d'après la première question, on déduit que sa différentielle est

$$D^2f(x,y)[(h,k),(u,v)]=f(u,k)+f(h,v).$$

3.
$$f(A+h)-f(A)=(A+h)^2-A^2=Ah+hA+h^2$$

avec $Ah+hA$ linéaire en h (et en A) et $||h^2||\leqslant||h||^2=o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et sa différentielle est $Df(A).h=Ah+hA$. Comme $Df(A)$ est lináire par rapport à A, sa différentielle en A est l'application bilinéaire

$$D^2f(A)[H,K]=KH+HK.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $f(x,y) = x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^3$, calculons la jacobienne de f :

$$Df(x,y) = (2x+y+\frac{3}{4}x^2, x+2y).$$

Les points critiques de f vérifient $Df(x,y) = 0$ et par conséquent vérifient les équations $2x+y+\frac{3}{4}x^2 = 0$ et $x+2y = 0$. Par conséquent f admet deux points critiques $(0,0)$ et $(-2,1)$. Pour savoir si ces points critiques sont des extrémums de f, il faut étudier la hessienne de f :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\frac{3}{2}x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres. Au point $(0,0)$,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)$ et ses deux valeurs propres sont strictement positive. La fonction f admet donc un minimum local au point $(0,0)$. Ce minimum n'est pas globale car $f(0,0) = 0$ et f prend des valeurs négatives pour $y = 0$ et x qui tend vers $-\infty$.
Au point $(-2,1)$,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3$. On peut alors soit calculer les valeurs propres soit remarquer que le determinant de la hessienne est égal au produit des deux valeurs propres (ici -3) et celles-ci sont donc non nulles et de signe contraire. Par conséquent le point $(-2,1)$ est point selle de f. ce n'est pas un extremum.

Correction de l'exercice 3 ▲

Le volume d'une boite étant invariant par rotations, on peut toujours supposer que toutes les boites sont centrées à l'origine et on des cotés parallèles aux axes de coordonnées. Par conséquent, la donnée d'un point (x,y,z) sur la sphère définit de manière unique une boite rectangulaire dont l'un des sommets est le point (x,y,z). On prendra x,y et z positifs car une telle boite a toujours un sommet dans le secteur positif de l'espace. Par conséquent, on doit maximiser la fonction volume $g(x,y,z) = 8xyz$ sur la sous-variété S définie par l'équation $f = 0$ avec $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$. Un point critique de g sur S vérifie

$$Dg(x,y,z) = \lambda Df(x,y,z)$$

et $f(x,y,z) = 0$. On a obtient alors le système d'équations :

$$\begin{gathered} 8yz = 2x \\ 8xz = 2y \\ 8xy = 2z \\ x^2+y^2+z^2 = R^2 \end{gathered}$$

Par conséquent

$$\begin{gathered} 8xyz = 2x^2 \\ 8xyz = 2y^2 \\ 8xyz = 2z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = R^2 \end{gathered}$$

et donc comme x,y et z sont positifs, on a $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Or g est continue et $S^+ = S \cap \{x \geqslant 0; y \geqslant 0; z \geqslant 0\}$ est un compact. Comme g est nulle sur le bord de S^+, le maximum de g est ateint en un point critique de g dans l'intérieur de S^+. Le seul point critique de g est donc bien ce maximum recherché. Ici, il n'y a pas eu besoin de calculer la hessienne de g sur S par la formule :

$$H = D^2 g - \lambda D^2 f$$

où λ est le coefficient de lagrange trouvé précédemment.
