



Sous-variétés

Exercice 1

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Dessiner S_λ en fonction de λ .
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Soit $x \in S_\lambda$, exprimer $T_x S_\lambda$ à l'aide de B .

Correction ▼

[002547]

Exercice 2

On muni \mathbb{R}^n de la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle u(x), x \rangle = 1\}$. Montrez que Q est une sous-variété et déterminez le plan tangent.

Correction ▼

[002548]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta, \varphi) = (\cos \theta (1 + 1/2 \cos \varphi), \sin \theta (1 + 1/2 \cos \varphi), 1/2 \sin \varphi)$ et soit $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de $(0z)$, et soit $C = \{(1 + 1/2 \cos \varphi, 0, 1/2 \sin \varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \cup_{\theta \in \mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dessiner T .
2. Montrer que $f(\theta, \varphi) = f(\theta_0, \varphi_0)$ si et seulement si il existe $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ est un ouvert de T .
4. Montrer que T est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

[002549]

Exercice 4

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = \det(A)$.

1. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\det(I + \lambda X) - 1}{\lambda} = \text{tr}(X)$ (penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{Id_n} f(X)$.
2. En remarquant que $\frac{\det(A + \lambda X) - \det(A)}{\lambda}$ est égal à $\det(A) \frac{\det(I + \lambda A^{-1} X) - 1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $D_A f(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 1$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \text{tr}(X) = 0\}$.

[002550]

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n . Soit $f : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \rightarrow E$ définie par $f(A) = {}^t A A$.

1. Montrer que $D_A f(X) = {}^t A X + {}^t X A$.

2. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in E$ et $X = 1/2AS$. Montrer que $D_A f(X) = S$. En déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\}$.

[002551]

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \rightarrow E$ un difféomorphisme de classe C^1 . On suppose que $f^n = Id$ et $f(a) = a$. On pose $A = D_a f$ et $u(x) = \sum_{p=1}^n A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f . Montrer que F est une sous-variété de E .
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . En déduire que 2/ n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = Id$.

[002552]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Considérons $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda$. Alors F est de classe C^1 , $JacF(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ et $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Si $\lambda \neq 0$, $\text{rang}(JacF(x_1, x_2, x_3)) = 1$ (le maximum possible) car sinon x_1, x_2, x_3 seraient tous nuls: impossible car $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$. Comme $(0, 0, 0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda, \text{rang} JacF(a) = 1$ et donc S_λ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

Si $\lambda = 0$ $T_0(S_\lambda) = \{\text{vecteurs tangents à } S_n \text{ en } 0\}$. Alors T_0S_0 est un cône et donc S_0 n'est pas une sous-variété.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^3, B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ et $x \in S_\lambda$. Si $\lambda \neq 0, JacF(x) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ et donc

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3; DF(x).u = 0\} = \{u = (u_1, u_2, u_3); (2x_1, 2x_2, -2x_3) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$\{(u_1, u_2, u_3); 2x_1u_1 + 2x_2u_2 - 2x_3u_3 = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3); 2B(x, u) = 0\}$$

d'où

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3; B(x, u) = 0\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Cas de \mathbb{R}^2 .

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse sur u implique que $u_{12} = u_{21}$. Si $x = (x_1, x_2)$, on a

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^2 u_i(x)x_i = (u_{11}x_1 + u_{12}x_2)x_1 + (u_{21}x_1 + u_{22}x_2)x_2 = u_{11}x_1^2 + u_{12}x_1x_2 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2.$$

Posons $f(x) = \langle u(x), x \rangle - 1$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{21}x_2 = 2u_{11}x_1 + 2u_{12}x_2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2u_{22}x_2 + u_{12}x_1 + u_{21}x_1 = 2u_{21}x_1 + 2u_{22}x_2.$$

Calculons

$$Df(x).x = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(u_{11}x_1^2 + u_{12}x_2x_1 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2) = 2 \langle u(x), x \rangle.$$

Si $x = (x_1, x_2) \in Q$ alors $\langle u(x), x \rangle = 1 \neq 0$ et donc $Df(x)$ étant non nul, il est de rang au moins 1 et donc de rang maximal. Q est bien une sous-variété de \mathbb{R}^2 de dimension 1.

Déterminons le plan tangent de Q .

$$T_x Q = \{y \in \mathbb{R}^2; Df(x)(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)y_i = 0\} = \\ \{y \in \mathbb{R}^n; 2 \langle u(x), y \rangle = 0\}.$$
