Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Théorème des fonctions implicites

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Correction ▼ [002541]

Exercice 2

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un nuique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

Exercice 3

On considère le système d'équations :

$$\left(\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{array} \right)$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z. [002543]

Exercice 4

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions $x \to a_j(x)$ sont C^1, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \to F(x_0, y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \to y(x)$ est C^1. [002544]

Exercice 5

Donner l'allure de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Correction ▼ [002545]

Exercice 6

Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [002546]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0)=(0,0)$ (par exemple $(1,1,1)$). f est C^1 car coordonnées polynomiales.

$$\operatorname{Mat} D_2 f(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y_0 & 2z_0\\ x_0z_0 & x_0y_0\end{pmatrix}$$

$\det(\operatorname{Mat} D_2 f(x_0,y_0,z_0))=-2x_0(y_0^2+z_0^2)\neq 0$ car $x_0y_0z_0=1$ donc $x_0\neq 0, y_0\neq 0, z_0\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe I intervalle contenant x_0 et $\varphi : I\to\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,\varphi(x))=0$ pour tout $x\in I$ et $\varphi(x_0)=(y_0,z_0)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Posons $f(x,y)=x^4+y^3-x^2-y^2+x-y$, $f(0,0)=0$ et $f(1,1)=0$. $\mathbb{R}$ est un espace de Banach et f est de classe C^1 car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-2y-1$$

Étude au point $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe I contenant 0, J contenant 0 et $g : I\to J$, C^1 tel que $g(0)=0$ et $f(x,g(x))=0, \forall x\in I$. On a

$$x^4+(g(x))^3-x^2-(g(x))^2+x-g(x)=0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3+3g^2(x)g'(x)-2x-2g(x)g'(x)+1-g'(x)=0$$

d'où $g'(0)=1$. On dérive encore :

$$12x^2+6g(x)g'(x)^2+3g^2(x)g''(x)-2-2g'(x)^2-2g(x)g''(x)-g''(x)=0$$

d'où

$$g''(0)=-4.$$

Étude au point $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$. Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x+1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=3$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe I contenant 1, J contenant 1 et $g : I\to J$ de classe C^1 tels que $g(1)=1$ et $f(g(x),x)=0, \forall y\in I$. On a

$$g(y)^4-g^2(y)+g(y)+y^3-y^2-y=0$$

En dérivant

$$4g^3g'-2gg'+g'+3y^2-2y-1=0$$

d'où $4g'(1)-g'(1)=0$ et donc $g'(1)=0$.

$$12g^2(g')^2+4g^3g''-2gg''-2(g')^2+g''+6y-2=0$$

d'où $g''(1)=-4/3$.