Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

# Théorème des fonctions implicites

## Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle $I$ contenant $x_0$ et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Correction ▼ [002541]

## Exercice 2

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour $x$ suffisamment proche de 0, il existe un nuique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

## Exercice 3

On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour $x$ proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera $y'$ en fonctionde $x, y$ et $z'$ en fonction de $x, z$. [002543]

## Exercice 4

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions $x \to a_j(x)$ sont $C^1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \to F(x_0, y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour $x$ voisin de $x_0$, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de $y_0$ et que la dépendance $x \to y(x)$ est $C^1$. [002544]

## Exercice 5

Donner l'allure de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Correction ▼ [002545]

## Exercice 6

Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite $\varphi$ de $x$ dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [002546]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ (par exemple $(1, 1, 1)$). $f$ est $C^1$ car coordonnées polynomiales.

$$\operatorname{Mat} D_2 f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

$\det(\operatorname{Mat} D_2 f(x_0, y_0, z_0)) = -2x_0(y_0^2 + z_0^2) \neq 0$ car $x_0 y_0 z_0 = 1$ donc $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $I$ intervalle contenant $x_0$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$ et $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$.

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Posons $f(x, y) = x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$, $f(0, 0) = 0$ et $f(1, 1) = 0$. $\mathbb{R}$ est un espace de Banach et $f$ est de classe $C^1$ car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 1$$

Étude au point $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe $I$ contenant $0$, $J$ contenant $0$ et $g : I \to J$, $C^1$ tel que $g(0) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I$. On a

$$x^4 + (g(x))^3 - x^2 - (g(x))^2 + x - g(x) = 0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3 + 3g^2(x)g'(x) - 2x - 2g(x)g'(x) + 1 - g'(x) = 0$$

d'où $g'(0) = 1$. On dérive encore :

$$12x^2 + 6g(x)g'(x)^2 + 3g^2(x)g''(x) - 2 - 2g'(x)^2 - 2g(x)g''(x) - g''(x) = 0$$

d'où

$$g''(0) = -4.$$

Étude au point $(1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$. Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $I$ contenant $1$, $J$ contenant $1$ et $g : I \to J$ de classe $C^1$ tels que $g(1) = 1$ et $f(g(x), x) = 0, \forall y \in I$. On a

$$g(y)^4 - g^2(y) + g(y) + y^3 - y^2 - y = 0$$

En dérivant

$$4g^3 g' - 2gg' + g' + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

d'où $4g'(1) - g'(1) = 0$ et donc $g'(1) = 0$.

$$12g^2(g')^2 + 4g^3 g'' - 2gg'' - 2(g')^2 + g'' + 6y - 2 = 0$$

d'où $g''(1) = -4/3$.