



## Théorème des fonctions implicites

---

### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ . Montrez qu'il existe un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  et une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tels que  $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$  et  $f(x, \varphi(x)) = 0$  pour tout  $x \in I$ .

[Correction ▼](#)

[002541]

### Exercice 2

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Démontrer que, pour  $x$  suffisamment proche de 0, il existe un nuage  $y = y(x) > 0$  tel que  $F(x, y) = 0$ . Vérifier, sans résolution explicite, que  $y'(x) = -x/y$ .

[002542]

### Exercice 3

On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour  $x$  proche de l'origine, il existe des fonctions positives  $y(x)$  et  $z(x)$  telles que  $(x, y(x), z(x))$  soit solution du système. On déterminera  $y'$  en fonction de  $x, y$  et  $z'$  en fonction de  $x, z$ .

[002543]

### Exercice 4

Considérons  $F(x, y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x)$  un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions  $x \rightarrow a_j(x)$  sont  $C^1$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .
2. pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le polynôme  $y \rightarrow F(x_0, y)$  a un zéro simple  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Démontrer que, dans ces conditions,  $F(x, y)$  possède, pour  $x$  voisin de  $x_0$ , un zéro  $y(x)$  qui lui est proche de  $y_0$  et que la dépendance  $x \rightarrow y(x)$  est  $C^1$ .

[002544]

### Exercice 5

Donner l'allure de  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$  au voisinage des points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

[Correction ▼](#)

[002545]

### Exercice 6

Montrer que l'équation  $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$  définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite  $\varphi$  de  $x$  dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0.

[002546]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$  (par exemple  $(1, 1, 1)$ ).  $f$  est  $C^1$  car coordonnées polynomiales.

$$\text{Mat} D_2 f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

$\det(\text{Mat} D_2 f(x_0, y_0, z_0)) = -2x_0(y_0^2 + z_0^2) \neq 0$  car  $x_0 y_0 z_0 = 1$  donc  $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe  $I$  intervalle contenant  $x_0$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, \varphi(x)) = 0$  pour tout  $x \in I$  et  $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Posons  $f(x, y) = x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ ,  $f(0, 0) = 0$  et  $f(1, 1) = 0$ .  $\mathbb{R}$  est un espace de Banach et  $f$  est de classe  $C^1$  car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 1$$

Étude au point  $(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ , c'est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ . Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe  $I$  contenant 0,  $J$  contenant 0 et  $g : I \rightarrow J, C^1$  tel que  $g(0) = 0$  et  $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I$ . On a

$$x^4 + (g(x))^3 - x^2 - (g(x))^2 + x - g(x) = 0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3 + 3g^2(x)g'(x) - 2x - 2g(x)g'(x) + 1 - g'(x) = 0$$

d'où  $g'(0) = 1$ . On dérive encore :

$$12x^2 + 6g(x)g'(x)^2 + 3g^2(x)g''(x) - 2 - 2g'(x)^2 - 2g(x)g''(x) - g''(x) = 0$$

d'où

$$g''(0) = -4.$$

Étude au point  $(1, 1)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$ . Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 1$$

et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ . Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe  $I$  contenant 1,  $J$  contenant 1 et  $g : I \rightarrow J$  de classe  $C^1$  tels que  $g(1) = 1$  et  $f(g(x), x) = 0, \forall x \in I$ . On a

$$g(y)^4 - g^2(y) + g(y) + y^3 - y^2 - y = 0$$

En dérivant

$$4g^3 g' - 2gg' + g' + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

d'où  $4g'(1) - g'(1) = 0$  et donc  $g'(1) = 0$ .

$$12g^2(g')^2 + 4g^3 g'' - 2gg'' - 2(g')^2 + g'' + 6y - 2 = 0$$

d'où  $g''(1) = -4/3$ .