Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Exo7

Théorème d'inversion locale, difféomorphismes

Exercice 1

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Correction ▼ [002527]

Exercice 2

1. Montrer que l'application $\varphi : (r, \theta) \to (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0, \infty[\times] -\pi, \pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x, y)$ est un élément de Isom$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [002528]

Exercice 3

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pas

$$\varphi(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y).$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = |x| + |y|$).
4. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
5. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Correction ▼ [002529]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h \rangle \geqslant \alpha \langle h, h \rangle.$$

1. En considérant la fonction $t \to \varphi(t) = \langle f(a+t(b-a)), b_a) \rangle$, montrez que
$$\langle f(b)-f(a), b-a\rangle \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle \text{ pour tout } a,b \in \mathbb{R}^n.$$
En déduire que f est une application fermée.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E, Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.
3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Correction ▼ [002530]

Exercice 5

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ l'application inversion de pôle 0, de puisssance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules
$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$
Calculer la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) et vérifier que cette matrice est égale à son inverse. [002531]

Exercice 6

Reconsidérez l'exercice 4 dans l'esprit suivant : “si f est un difféomorphisme, la matrice inverse de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de f^{-1}.” [002532]

Exercice 7

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A-I|| < \alpha$ admette une racine carrée. [002533]

Exercice 8

1. Montrer que si a,b sont voisins de 1, on peut trouver $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $y+e^{xy} = a,\ x+e^{-xy} = b$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y) = (x\sin(xy)+y, y\cos(xy)+x)$, et soit (a_n,b_n) une suite tendant vers $(0,0)$. Montrer que si $f(a_n,b_n) = 0$ pour tout n, la suite (a_n,b_n) stationne.

[002534]

Exercice 9

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 $\varphi = (f,g)$. On considère u,v réels et on cherche x,y tels que
$$(*) \quad f(x,y) = u,\ g(x,y) = v.$$
1. On suppose que la différentielle de φ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u,v) le système $(*)$ admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
2. A-t-on des solutions si la différentielle est de rang 0 ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de φ est de rang 1 en tout point de U. Si f'_x ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi : (x,y) \to (f(x,y),y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$. En déduire G telle que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sur V. Que peut-on dire des solutions du système $(*)$?

[002535]

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, et B_r la boule fermée $||x|| \leqslant r$. Soit f un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de E, contenant 0, tel que $f(0) = 0$. On pose $A = f'(0) \in \mathscr{L}(E)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $R>0$ tel que pour tout $x\in B_R$,
$$||A^{-1}(f(x))-x||\leqslant \varepsilon\ ||x||.$$
2. Montrer qu'il existe $R'>0$ tel que pour $0\leqslant r\leqslant R'$,
$$(1-\varepsilon)\ A(B_r)\subset f(B_r)\subset (1+\varepsilon)\ A(B_r).$$
3. En déduire que $\lim_{r\to 0}\frac{\text{vol }f(B_r)}{\text{vol }(B_r)}=|\det A|$.

[002536]

Exercice 11

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+a\sin y,y+b\sin x)$.

1. Montrer que si $|ab|<1$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que si $|ab|=1$, f n'est plus un difféomorphisme mais reste un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

[002537]

Exercice 12

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que
$$||f(x)-f(y)||\geqslant k||x-y||$$
pour tous $x,h\in\mathbb{R}^n$, k étant une constante >0. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f'(x)$ est inversible pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

[002538]

Exercice 13

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f:\overline{G}\to\mathbb{R}^n$ une application continue dans $\overline{G}$ et C^1 dans G. Pour tout $x\in G$, on suppose $Df(x)$ inversible. Démontrer que, sous ces conditions, l'application $x\mapsto\|f(x)\|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial G=\overline{G}\setminus G$. [002539]

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert connexe de E et soit $f:\Omega\to E$ une application de classe C^1 telle que $|||Df(x)|||\leqslant c$, pour tout $x\in\Omega$, où $0\leqslant c<1$. Montrer que $Id_{|E}-f$ est un difféomorphisme C^1 de Ω sur son image. [002540]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La fonction f étant dérivable, elle est continue. Montrons qu'elle est injective. Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=f(y)$. Si $x\neq y$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]x,y[$ tel que $f'(c)=0$ ce qui contredit le fait que f' ne s'annule jamais. Par conséquent $x=y$ et f est injective. Pour montrer que f^{-1} est continue, il faut montrer que l'image réciproque par f^{-1} d'un voisinage d'un point est un voisinage de la réciproque du point. Ou encore, que l'image directe par f d'un voisinage d'un point a est un voisinage de $f(a)$. Soit V un voisinage de a, il contient un intervalle du type $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$, l'image de ce connexe par une fonction continue est encore connexe et est donc un intervalle $[c,d]$ (fermé car f est continue et l'intervalle de départ est compact). Si $f(a)\in]c,d[$, on la démonstration est finie. Si $f(a)=c$ ou $f(a)=d$ alors a est un extrémum local de f et donc $f'(a)=0$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi f est un homéormorphisme. f^{-1} est différentiable car la différentielle de f ne s'annule pas (théorème de deug...).
2. Le taux d'accroissement
$$T_x(f)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1+x\sin\frac{\pi}{x}$$
tend vers 1 quand x tend vers zero ($\sin\frac{\pi}{x}$ est bornée) et donc f est dérivable au point 0 et $f'(0)=1\neq 0$.
3. Par l'absurde, supposons que f soit inversible au voisinage de 0.Soit $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[$ soit inclus dans ce voisinage. f étant continue (car dérivable), elle est strictement monotone. Or $f'(x)=1-\pi\cos\frac{\pi}{x}+2x\sin\frac{\pi}{x}$. Prenons $k\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2k}<\varepsilon$ et $\frac{1}{1+2k}<\varepsilon$ alors $f'(\frac{1}{2k})=1-\pi<0$ et $f(\frac{1}{2k+1})=1+\pi>0$ et donc f n'est pas monotone sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ ce qui donne la contradiction recherchée. Le théorème de l'inverse local nous montre de plus que f n'est pas de classe C^1 dans aucun voisinage de 0.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. L'application $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont. Pour montrer que c'est un difféormorphisme global, il suffit de montrer que c'est un difféo local (théorème de l'inverse local) et qu'elle est bijective. Calculons la matric jacobienne de φ :
$$D\varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

La jacobienne de φ est $det(D\varphi(r,\theta))=r(\sin^2x+\cos^2x)=r>0$ si $(x,y)\neq(0,0)$. L'application φ est donc bien un difféomorphisme local au voisinage de chacun des point de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. La bijectivité se vérifie en explicitant par exemple la réciproque de φ (si on pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, on pourra considérer les données x^2+y^2 et y/x...).

Correction de l'exercice 3 ▲

1. φ a des coordonnées de classe C^1, elle l'est donc aussi. On a
$$Jac(\varphi)(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 1/2\cos(y/2)\\ 1/2\cos(x/2) & -1\end{pmatrix}$$
On a $det(Jac(\varphi)(x,y))=1-1/4\cos(x/2)\cos(y/2)\geqslant 3/4>0$. Par conséquent la jacobienne est inversible et $D\varphi(x,y)\in Isom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)=GL(\mathbb{R}^2$.
2. D'après le théorème de l'inverse local, Il suffit de montrer que φ est injective. Supposons $\varphi(x_1,y_1)=\varphi(x_2,y_2)$, alors $\sin(y_1/2)-x_1=\sin(y_2/2)-x_2$ et $\sin(x_1/2)-y_1=\sin(x_2/2)-y_2$. D'où $\sin(y_1/2)-\sin(y_2/2)=x_1-x_2$ et $\sin(x_1/2)-\sin(x_2/2)=y_1-y_2$. Or, $\forall a,b\in\mathbb{R},|\sin a-\sin b|\leqslant|a-b|$ (conséquence des accroissements finis appliqué à $\sin x$). Donc $|x_1-x_2|\leqslant|y_1/2-y_2/2|$ et $|y_1-y_2|\leqslant|x_1/2-x_2/2|$ d'où $|x_1-x_2|\leqslant 1/4|x_1-x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ et $y_1=y_2$. $\varphi:U\to F$ est injective. L'ensemble $f(U)$ est ouvert car il est réunion d'ouverts (d'après thm inverse local). C'est un difféomorphisme en U et $\varphi(U)$.

3. Soient $(X_1,y_1),(X_2,Y_2)\in\varphi(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi(x_1,y_1)=(X_1,Y_1)$ et $\varphi(x_2,y_2)=(X_2,Y_2)$ ou encore $\varphi^{-1}(X_1,Y_1)=(x_1,y_1)$ et $\varphi^{-1}(X_2,Y_2)=(x_2,y_2)$. On a
$$||\varphi^{-1}(X_1,Y_1)-\varphi^{-1}(X_2,Y_2)||=||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||=||(x_1-x_2,y_1,y_2)||=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$
Or $\sin(y_1/2)-x_1=X_1$, $\sin(y_2/2)-x_2=X_2$, $\sin(x_1/2)-y_1=Y_1$ et $\sin(x_2/2)-y_2=Y_2$. Par conséquent
$$x_1-x_2=\sin(y_1/2)-X_1-\sin(y_2/2)+X_2$$
$$y_1-y_2=\sin(x_1/2)-Y_1-\sin(x_2/2)+Y_2.$$
D'où
$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leqslant|X_2-X_1|+|\sin(y_1/2)-\sin(y_2/2)|+|Y_2-Y_1|+|\sin(x_1/2)-\sin(x_2/2)|$$
$$\leqslant|X_2-X_1|+1/2|y_1-y_2|+|Y_2-Y_1|+1/2|x_1-x_2|$$
d'où
$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leqslant 2(|X_2-X_1|+|Y_2-Y_1|)\leqslant 2||(X_1,Y_1)-(X_2,Y_2)||.$$
Donc φ^{-1} est lipschitzienne.
4. Soit (X_n,Y_n) une suite de cauchy dans $\varphi(\mathbb{R}^2)$, $((X_n,Y_n)=\varphi(x_n,y_n)\,;\,(x_n,y_n)=\varphi^{-1}(X_n,Y_n))$. Pour tout $\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N},p,q\geqslant n\Rightarrow||(X_p,Y_p)-(X_q,Y_q)||<\varepsilon$. Par conséquent, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbb{N};p,q\geqslant n\Rightarrow||(x_p,y_p)-(x_q,y_q)||<2\varepsilon$. La suite (x_n,y_n) est alors de cauchy dans $\mathbb{R}^2$, qui est complet. Par conséquent elle converge. Soit (x,y) sa limite. Comme φ est continue et que $\lim_n(x_n,y_n)=(x,y)$ alors $\lim_n\varphi(x_n,y_n)=\varphi(x,y)$. La suite (X_n,Y_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge. Soit (X,Y) sa limite, alors $(X,Y)=\varphi(x,y)$ car $(X_n,Y_n)\to(X,Y)$ et $\varphi(x_n,y_n)\to\varphi(x,y)$. Donc $(X,Y)\in\varphi(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est alors complet et donc fermé. Comme $\varphi(\mathbb{R}^2$ est un ouvert fermé et non vide (il contient $(0,0)=\varphi(0,0)$) dans le connexe $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.
5. $p=(1-\pi/2,\sqrt{2}/2-\pi)=\varphi(\pi/2,\pi)=\varphi(q)$ où $q=(\pi/2,\pi)$. $\varphi:E\to F$ est un C^1-difféormorphisme donc $\varphi^{-1}\circ\varphi=Id$ et donc
$$Id=D(\varphi^{-1}\circ\varphi)(q)=D\varphi^{-1}(\varphi(q))\circ D\varphi(q).$$
Or $D\varphi^{-1}(\varphi(q))=(D\varphi(q))^{-1}$ et donc $Jac\varphi^{-1}(p)=(Jac\varphi(\pi/2,\pi))^{-1}$. Or
$$Jac\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 1/2\cos(y/2)\\ 1/2\cos(x/2) & -1\end{pmatrix}.$$
D'où
$$Jac\varphi(\pi/2,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \sqrt{2}/4 & -1\end{pmatrix}$$
et donc
$$Jac\varphi^{-1}(p)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sqrt{2}/4 & -1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Posons $\theta(t)=a+t(b-a)$ et $\Psi(x)=\langle x,b-a\rangle$ qui est linéaire et continue (donc C^∞).

1. f et φ sont de classe C^1 car composées d'applications de classe C^1. On a
$$D\varphi(t)=\varphi'(t)=(\Psi\circ f\circ\theta)(t)'(t)=D\Psi(f(\theta(t)))\circ Df(\theta(t))\circ D\theta(t)=\langle Df(a+t(b-a))(b-a),b-a\rangle.$$
Par conséquent :
$$\varphi'(t)\geqslant\alpha\langle b-a,b-a\rangle.$$
Or, $\varphi(1)-\varphi(0)=\langle f(b)-f(a),(b-a)\rangle$ et il existe $t\in]0,1[$ tel que $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t)$ d'où
$$\langle f(b)-f(a),b-a\rangle\geqslant\alpha\langle b-a,b-a\rangle.$$

Indications pour mq f est fermée : Posons $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ alors

$$\alpha\|b-a\|^2 \leqslant \langle f(b)-f(a), b-a\rangle \leqslant \|f(b)-f(a)\|.\|b-a\|.$$

D'où

$$\|b-a\| \leqslant 1/\alpha\|f(b)-f(a)\|.$$

Soit F un fermé et y_n une suite de points de $f(F)$ convergeant vers un point limite y_∞. Il faut montrer que $y_\infty \in f(F)$. Soit x_n une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x_n) = y_n$. Il reste à montrer que cette suite admet est de Cauchy, qu'elle converge donc et que sa limite x_∞ vérifie $f(x_\infty) = y_\infty$.