Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Théorème des accroissements finis

Exercice 1

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \overset{<}{\to} b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x<y$ de I et $t \in [0,1]$. (Poser $z=(1-t)x+ty$ et appliquer les AF à $[x,z]$ puis $[z,y]$.)

Correction ▼ [002518]

Exercice 2

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x)=e^{ix}$.

Correction ▼ [002519]

Exercice 3 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x^2-y, x^2+y^2)$ et $g=f\circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $||Dg(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$.

Correction ▼ [002520]

Exercice 4

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y)=(\cos x-\sin y,\ \sin x-\cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)|| \leqslant \sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geqslant 1$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(\cos x_n-\sin y_n), \quad y_{n+1}=\frac{1}{2}(\sin x_n-\cos y_n)$$

converge pour tout (x_0,y_0). Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

Correction ▼ [002521]

Exercice 5

Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k>0$ tel que

$$||f'(x)|| \leqslant k||f(x)||, \quad \forall x\in]a,b[.$$

Montrer que si f s'annule en un point $x_0 \in]a,b[$, f est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E=\{x\in]a,b[\ ;\ f(x)=0\}$ est ouvert). [002522]

Exercice 6

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leqslant k|f(x)|,\ \forall x \in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$,

$$|f(x)| \leqslant e^{k||x-a||}\, |f(a)|.$$

Indication : considérer l'application $t \in [0,1] \to f(a+t(x-a)))$. [002523]

Exercice 7

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois avec elle-même. On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(x,y) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow F(x,y) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||(x,y)|| < \varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

[002524]

Exercice 8

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)\ .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2 ;\ \lim_{k\to\infty} F^k(p) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|||DF(p)||| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

[002525]

Exercice 9

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\|\ .$$

Correction ▼ [002526]

Correction de l'exercice 1 ▲

Montrons que f se prolonge par continuité au point b, on montrera alors que f est dérivable à gauche au point b est que cette dérivée est $\lim_{x\to b^-} f'(x)$. Pour celà montrons qu'il existe un réel k tel que toute suite $\{x_n\}$ tendant vers b vérifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$. Remarquons que la dérivée $f'(x)$ admettant une limite au point b, elle est bornée sur un petit voisinage (à gauche) de b (notons M ce majorant). Soit y_n une suite convergent vers b. Alors la suite $f(y_n)$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La suite $\{y_n\}$ étant de cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, p,q \geqslant N \Rightarrow |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Or d'après les accroissements finis :

$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q) f'(c_{p,q}) \text{ où } c_{p,q} \in]y_p, y_q[.$$

Par conséquent,

$$|f(y_p) - f(y_q)| \leqslant |y_p - y_q|.|f'(c_{p,q})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} M \leqslant \frac{epsilon}{2} < \varepsilon$$

et donc la suite $\{f(y_n)\}$ est de cauchy et converge vers un réel que nous noterons l. Montrons que c'est le cas pour toute autre suite $\{x_n\}$ qui tend vers b. On a

$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$

D'après les accroissements finis, $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant M.|x_n - y_n|$ et donc tend vers zero car les suites x_n et y_n tendent vers b. De plus, comme on l'a vu, $f(y_n)$ tend vers k et donc $f(x_n)$ aussi. Prolongeons f par continuité au point b en posant $f(b) = k$. On a alors le taux d'accroissement

$$T_x f = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{(b - x) f'(c_x)}{b - x} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in]x, b[.$$

Quand x tend vers b, c_x aussi et donc $T_x f$ tend vers l.

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $f'(x) = ie^{ix}$ (on peut le vérifier en coordonnées). Si l'égalité des accroissement finis était vérifiée il existerait

$$c \in]0, \pi[\text{ tel que } f(\pi) - f(0) = (\pi - 0) ie^{ic}$$

ce qui est impossible car en prenant les modules on trouverait $2 = \pi$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. f est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont (polynômes). g l'est car c'est la composée de deux fonctions C^∞.
2. La matrice jacobienne de f est :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

D'apès la formule de différentielle d'une composée, on a

$$Dg(x,y) = Df(f(x,y)) \circ Df(x,y).$$

Or $f(0,0) = 0$ et

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Par continuité de $Dg(x,y)$ à l'origine et en prenant $\varepsilon = 1/2$ on a :

$$\exists \rho > 0, ||(x,y)-(0,0)|| \leqslant \rho \Rightarrow ||Dg(x,y) - Dg(0,0)|| \leqslant 1/2$$

d'où le résultat demandé.

4. D'après les accroissements finis, pour tous $X,Y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$||g(X)-g(Y)|| \leqslant \sup_{Z \in \overline{B}_\rho((0,0))} ||Dg(Z)||.||X-Y|| \leqslant 1/2||X-Y||$$

et donc g est contractante. Le Boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ la boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ étant compacte et complète, le théorème du point fixe permet de conclure.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$

On a

$$|||Df(x,y)||| = \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{||Df(x,y).(a,b)||}{||(a,b)||} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 y + 2ab\sin x\cos x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 y + 2ab\cos x\sin y}}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(x+y)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{1+\frac{2|a||b|}{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{2}$$

car

$$(|a|-|b|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|.$$

2. Soient $U_n = (x_n, y_n)$ et $G(x,y) = 1/2F(x,y)$, alors $|||G||| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_{n+1} = G(U_n)$. D'après les accroissements finis, G est contractante et donc le théorème du point fixe donne le résultat demandé.

Correction de l'exercice 9 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(x) = f(x) - Df(a)x$ en remarquant que la matrice jacobienne de $Df(a)x$ est la matrice $Df(a)$.
