



## Applications différentiables

---

### Exercice 1

Soit  $f$  une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  espaces vectoriels normés de dimension finie.

On rappelle les implications suivantes : si  $x_0 \in E$ , “ $f$  de classe  $C^1$  en  $x_0$ ”  $\Rightarrow$  “ $f$  différentiable en  $x_0$ ”  $\Rightarrow$  “ $f$  continue en  $x_0$ ”. On sait de même que “ $f$  différentiable en  $x_0$ ”  $\Rightarrow$  “ $f$  admet des dérivées partielles en  $x_0$ ”  
montrer que les réciproques sont fausses en général en s’inspirant de :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin \frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

ou de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[Correction ▼](#)

[002503]

### Exercice 2

1. Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  espaces vectoriels normés et supposons  $f$  différentiable en  $a$  ; montrer que pour tout vecteur  $u \in E^*$ , la dérivée de  $f$  en  $a$  dans la direction  $u$  existe , i.e.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+hu) - f(a))$  et l’exprimer à l’aide de  $f'(a)$ .
2. On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0,0) = 0$  et, si  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ . Montrer que  $f$  est dérivable en  $(0,0)$  dans toutes les directions, mais que  $f$  n’est pas différentiable en  $(0,0)$ .

[002504]

### Exercice 3

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  et  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y, \quad F(x,x) = g'(x).$$

Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et calculer sa différentielle.

[Correction ▼](#)

[002505]

### Exercice 4

Soit  $E^n$  l’espace des polynômes de degré  $\leq n$ . Etudier la différentiabilité des applications  $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t)) dt$  et  $P \mapsto P' - P^2$ .

[Correction ▼](#)

[002506]

### Exercice 5

Soit  $f$  une application différentiable de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même, propre (i.e.  $\|f(x)\|$  tend vers  $\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ ), telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$   $Df(x)$  soit injective. On va montrer que  $f$  est surjective. Soit  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $g(x) = \|f(x) - a\|^2$  ;

1. Calculer  $Dg(x)$ .
2. Montrer que  $g$  atteint sa borne inférieure en un point  $x_0$  de  $\mathbb{R}^2$ , et que  $Dg(x_0) = 0$ ; en déduire le résultat.

Correction ▼

[002507]

### Exercice 6

Soit, dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  un sous-espace fermé, et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = d(x, F)$ . On rappelle que  $f$  est 1-lipschitzienne, et que pour chaque  $x$  il existe  $y \in F$  tel que  $f(x) = d(x, y)$ .

1. On suppose que  $f$  est différentiable en  $x \notin F$ . Montrer que  $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \leq 1$ .
2. On considère la fonction  $\varphi : t \in [0, 1] \rightarrow f((1-t)x + ty)$ ; en calculant  $\varphi'(0)$  de deux façons, montrer que  $Df(x) \cdot \frac{x-y}{\|x-y\|} = 1$  et  $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = 1$ .
3. En déduire que  $y$  est unique.

Correction ▼

[002508]

### Exercice 7

Soit  $E$  un espace de Banach et  $\mathcal{L}(E)$  l'espace des endomorphismes linéaires continus de  $E$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$ ; montrer que l'application  $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{tA}$  est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de  $E$  est associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $x \in E$ . Montrer que l'application  $\Phi : t \rightarrow \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle$  est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que  $A$  est antisymétrique. Montrer que pour tout  $t$ ,  $e^{tA}$  est unitaire.

[002509]

### Exercice 8

Soit  $\alpha > 0$ . Étudier la différentiabilité à l'origine de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est définie par  $f(0, 0) = 0$  et par

$$f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

[002510]

### Exercice 9

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

et  $f(0, 0) = 0$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , que pour tout  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$  existe, mais que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

[002511]

### Exercice 10

Soit  $X = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de la norme uniforme et soit  $f$  une application de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On note  $F$  l'application  $\varphi \mapsto f \circ \varphi$  de  $X$  dans  $X$ . Montrer que pour chaque  $\varphi \in X$ ,  $DF(\varphi)$  est l'opérateur linéaire de multiplication par  $f' \circ \varphi$  dans  $X$  :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h f' \circ \varphi,$$

et que  $DF$  est continue.

[002512]

### Exercice 11

Soit  $\mathcal{F}$  l'algèbre des matrices carrés  $p \times p$  munie d'une norme.

1. Soit  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui associe à une matrice  $A$  son déterminant  $f(A) = \det(A)$ . Montrer qu'elle est différentiable et déterminer  $Df$ .

2. Pour  $n \geq 1$ , on considère l'application  $\varphi_n(A) = A^n$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ . Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice  $A \in \mathcal{F}$ .
3. On désigne par  $U$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{F}$ . Montrer que  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{F}$  et calculer la différentielle de l'application  $A \mapsto A^{-1}$  de  $U$  dans  $U$ .

[002513]

### Exercice 12

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x_1, x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$  ?
2. Généraliser ceci à  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|_\infty$ , avec  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathcal{F}$  l'ensemble des suites convergentes vers zero.

[002514]

### Exercice 13

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ . Est-ce qu'elle est différentiable ?  
 Considérons maintenant  $l^1$  l'espace des suites réelles muni de la norme  $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ .

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue  $L$  sur  $l^1$  il existe une suite bornée  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  telle que

$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j .$$

2. Montrer que la norme  $\|\cdot\|_1 : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas différentiable en aucun point de  $l^1$  (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

[002515]

### Exercice 14

Dans un espace normé  $(\mathcal{F}, N)$ , on considère l'application  $x \mapsto N(x)$ . Rappeler que, lorsque cette application  $N$  est différentiable en  $x \in \mathcal{F}$ , alors

$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N(x+th) - N(x)) .$$

En déduire que  $N$  n'est pas différentiable en  $0 \in \mathcal{F}$ . Supposons  $N$  différentiable en  $x \in \mathcal{F}$ , alors justifier que  $N$  l'est aussi en  $\lambda x$ , où  $\lambda > 0$ , et que  $DN(x) = DN(\lambda x)$ . En considérant la dérivée en  $\lambda = 1$  de l'application  $\lambda \mapsto N(\lambda x)$ , montrer que  $DN(x) \cdot (x) = N(x)$  et en déduire  $\|DN(x)\| = 1$ .

[002516]

### Exercice 15

Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  et de la norme associée  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ . Soit  $u$  un endomorphisme continu de  $\mathcal{E}$  que l'on suppose symétrique, i.e.

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \text{pour tout } x, y \in \mathcal{E} .$$

1. Montrer que l'application  $x \in \mathcal{E} \mapsto \langle u(x), x \rangle$  est différentiable sur  $\mathcal{E}$  et calculer sa différentielle. L'application  $x \mapsto \|x\|^2$  est donc différentiable.
2. On définit une application  $\varphi : \mathcal{E} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$ . Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite  $D\varphi$ . Montrer que, pour un élément non nul  $a \in \mathcal{E}$ , on a  $D\varphi(a) = 0$  si et seulement si  $a$  est vecteur propre de  $u$ .

[002517]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. (Etude en 0).  $|\sin(1/x)| \leq 1$  par conséquent  $|x^2 \sin(1/x)| \leq x^2$ . De même  $|y^2 \sin(1/y)| \leq y^2$ . Par conséquent

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \leq (\|(x, y)\|_2)^2$$

Et donc

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} |f(x, y) - f(0)| = 0$$

et donc  $f$  est continue à l'origine. En remarquant que  $\|(x, y)\|_2^2 = o(\|(x, y) - (0, 0)\|_2)$  on a  $f(x, y) = 0 + o(\|(x, y) - (0, 0)\|_2)$  et donc  $f$  est différentiable en 0 et

$$Df(0) = 0.$$

Par conséquent  $f$  admet des dérivées partielles dans toutes les directions à l'origine qui sont nulles. La fonction  $f$  n'est pas contre par de classe  $C^1$  à l'origine. Il suffit de remarquer que la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sur la droite  $y = 0$  n'est pas continue en 0.

2. Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f$  est continue en  $(x, y)$  et même de classe  $C^\infty$  en tant que composés sommes, produits et quotient de telles fonctions. Il reste à étudier  $f$  à l'origine. Or,

$$|f(x, y)| = \frac{|xy^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \leq |x| \leq \|(x, y)\|_2.$$

Ainsi,  $f$  est continue à l'origine et  $y$  tend vers 0.

Montrons par l'absurde que  $f$  n'est pas dérivable à l'origine. Notons  $Df(0)$  la (supposée) différentielle de  $f$  à l'origine. L'application linéaire  $Df(0)$  s'obtient par la calcul de l'image de vecteurs de la base de  $\mathbb{R}^2$ . Calculons pour 'les dérivées directionnelles de  $f$  à l'origine :

$$D_{(1,0)}f(0) = [Df(0)]((1, 0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h(1, 0)) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$D_{(0,1)}f(0) = [Df(0)]((0, 1)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h(0, 1)) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$Df(0) = 0$$

Or,

$$D_{(1,1)}f(0) = [Df(0)]((1, 1)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h(1, 1)) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{2h^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ce qui donne la contradiction recherchée.

## Correction de l'exercice 3 ▲

En tout point  $(x_0, y_0)$  avec  $x_0 \neq y_0$ ,  $f$  est continue et même de classe  $C^2$  car composée (projections sur  $(0x)$  et  $(0y)$ ), différence et quotient de fonctions de classe  $C^2$  dont le dénominateur ne s'annule pas. Dans ces points, la différentielle de  $f$  est donnée par la matrice jacobienne :

$$Df(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \left( \frac{g'(x_0)(x_0 - y_0) - (g(x_0) - g(y_0))}{(x_0 - y_0)^2} \quad , \quad \frac{-g'(y_0)(x_0 - y_0) + (g(x_0) - g(y_0))}{(x_0 - y_0)^2} \right)$$

qui est bien de classe  $C^1$  ( $g$  étant de classe  $C^2$ ,  $g'$  est de classe  $C^1$ ). Montrons que  $F$  est continue aux points de la forme  $(a, a)$ . Le DL de  $g$  à l'ordre 2 entre  $x$  et  $y$  donne  $g(y) = g(x) + (y - x)g'(c_{x,y})$  avec  $c \in [x, y]$  d'où

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = F(a, a)$$

car comme  $(x, y)$  tend vers  $(a, a)$ ,  $x$  et  $y$  tendent tous les deux vers  $a$  et donc  $c_{x,y}$  aussi (et  $g'$  est continue). Pour montrer que  $F$  est  $C^1$  (sachant que  $F$  est continue), il suffit de montrer que la différentielle de  $F$  se prolonge par continuité sur  $\mathbb{R}^2$ . Le DL de  $g$  à l'ordre 2 entre  $x_0$  et  $y_0$  est :

$$g(x_0) = g(y_0) + (x_0 - y_0)g'(y_0) + \frac{(x_0 - y_0)^2}{2}g^{(2)}(c_1) \text{ avec } c_1 \in [x_0, y_0].$$

$$g(y_0) = g(x_0) + (y_0 - x_0)g'(x_0) + \frac{(y_0 - x_0)^2}{2}g^{(2)}(c_2) \text{ avec } c_2 \in [x_0, y_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g^{(2)}(c_2)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g^{(2)}(c_1)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_1)}{2}$$

La fonction  $g$  étant de classe  $C^2$ , on a

$$\lim_{(x_0, y_0) \rightarrow (a, a)} Df(x_0, y_0) = (g^{(2)}(a)/2, g^{(2)}(a)/2)$$

et donc  $Df$  se prolonge par continuité sur tout  $\mathbb{R}^2$ .  $F$  est donc bien de classe  $C^1$ .

---

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $F_1(P) = \int_0^1 P^3 - P^2 dt$ , et soit  $h$  un polynôme de degré  $n$  alors

$$F_1(P+h) - F_1(P) = \int_0^1 [(P^3 + 3P^2h + 3Ph^2 + h^3) + (P^2 + 2Ph + h^2) - P^3 - P^2] dt =$$

$$\int_0^1 h(3P^2 + 2P) dt + \int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt$$

Or  $|\int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt| = o(\|h\|_\infty)$  donc

$$DF_1(h) = \int_0^1 (3P^2 + 2P)h dt.$$

Soit  $F_2(P) = P' - P^2$  et soit  $h$  un polynôme de degré  $n$  alors

$$F_2(P+h) - F_2(P) = (P+h)' - (P+h)^2 - P' + P^2 = h' - 2Ph - h^2$$

Or  $h^2 = o(\|h\|)$  (pour toute norme a choisir). On a donc

$$DF_2(h) = h' - 2Ph.$$


---

#### Correction de l'exercice 5 ▲

1. On a  $g(x, y) = \langle f(x, y) - a, f(x, y) - a \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire Euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $g$  est différentiable en tant que composée et produit de fonctions différentiables. La différentielle  $Df$  est donné par la matrice Jacobienne

$$\left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

et  $Dg$  par la matrice

$$\left( \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \langle f(x,y) - a, f(x,y) - a \rangle = \\ &< \frac{\partial}{\partial x} (f(x,y) - a), f(x,y) - a \rangle + \langle f(x,y) - a, \frac{\partial}{\partial x} (f(x,y) - a) \rangle = \\ &2 \langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f(x,y) - a \rangle. \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2 \langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f(x,y) - a \rangle.$$

2. L'application  $f$  est continue (car différentiable) et tend vers l'infini quand  $(x,y)$  tend vers l'infini. Ainsi

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \|(x,y)\| \geq B \Rightarrow \|f(x,y)\| \geq A.$$

Soit  $m = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y)$ , pour  $A = m + 1$ , il existe  $B > 0$  tel que

$$\|(x,y)\| \geq B \Rightarrow g(x,y) = \|f(x,y)\|^2 \geq A^2 \geq (m+1)^2 \geq m+1.$$

On a donc

$$m = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y) = \inf_{\|(x,y)\| \leq B} g(x,y).$$

Or la boule  $\bar{B}(0,B)$  étant compacte et  $g$  continue, l'inf  $y$  est atteint en un point  $X_0 = (x_0, y_0) \in B(0,B) \subset \mathbb{R}^2$ . Comme  $X_0$  est un minimum global de  $g$ , c'est aussi un minimum de la restriction de  $g$  sur toute droite passant par  $X_0$ . Comme la dérivé d'une fonction réelle en un minimum est nulle, toutes les dérivées partielles de  $g$  sont nulles et donc  $Dg(X_0) = 0$  et par conséquent la matrice jacobienne de  $g$  est nulle. On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2 \langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f(x_0, y_0) - a \rangle = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 2 \langle \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), f(x_0, y_0) - a \rangle = 0.$$

Comme  $Df$  est injective, ses colonnes forment une base de  $\mathbb{R}^2$ . Par conséquent les projections de  $f(x_0, y_0) - a$  sur la base  $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$  sont nulles et donc

$$f(x_0, y_0) - a = 0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = a$$

et donc  $a$  admet bien un antécédent. Ceci étant valable pour tout  $a \in \mathbb{R}^2$ , on a montré que  $f$  est surjective.

## Correction de l'exercice 6 ▲

1. Pour montrer que  $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \leq 1$ , il faut montrer que si  $h \in \mathbb{R}^n$ , on a  $|Df(x).h| \leq \|h\|$ . On a

$$|Df(x).h| = |D_h f(x)| = \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right|.$$

Or  $f$  est 1-lipschitzienne et donc  $|f(x+th) - f(x)| \leq \|th\| = t\|h\|$ . Par conséquent pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $|Df(x).h| \leq \|h\|$  ce qui donne l'inégalité demandée.

2.

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t} = \\ &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} = Df(x).(y-x). \end{aligned}$$

Ou encore, soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application  $\psi(t) = (1-t)x + ty$ , on a alors  $\varphi(t) = f \circ \psi$  et d'après la formule de différentielle d'une composition :

$$\varphi'(0) = Df(\psi(0)).D\psi(0) = Df(x).(y-x).$$

Or,

$$d(x, F) = d(x, y) = \|x - y\| = \frac{1}{1-t} \|(1-t)(x-y)\| = \\ \frac{1}{1-t} \|[(1-t)x + ty] - [ty + (1-t)y]\| = \frac{1}{1-t} d((1-t)x + ty, y).$$

Notons  $x_t = (1-t)x + ty$ , on a alors

$$d(x_t, y) = (1-t)d(x, F).$$

Or,  $\varphi(t) = d(x_t, F) \leq d(x_t, y) \leq (1-t)d(x, y) \leq \varphi(0)$  et donc

$$|\varphi'(0)| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0) - \varphi(t)}{t} \geq \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x, y) - (1-t)d(x, y)}{t} \geq d(x, y) = \|x - y\|.$$

Donc

$$|Df(x)(x - y)| \geq \|x - y\|$$

d'où la deuxième inégalité.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux point  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $d(x, F) = d(x, y_1) = d(x, y_2)$ . Alors, de la même manière que précédemment, on a  $Df(x).(x - y_1) = Df(x).(x - y_2) = d(x, F)$  et donc  $Df(x).(x - y_1 + x - y_2) = 2d(x, F)$ . Or,  $\|x - y_1 + x - y_2\| < 2d(x, F)$  car les vecteurs  $x - y_1$  et  $x - y_2$  ne sont pas alignés. Mais alors cela contredit le fait que  $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = 1$ .
-