



## Préalables, rappels

---

### Exercice 1

---

1. Montrez que  $d(x, y) = |x - y|$  est bien une distance sur l'ensemble des réels.
2. Pour tout couple d'éléments  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $d(X, Y) = \sup_{i=1..n} |x_i - y_i|$ . Montrez que  $d$  est bien une distance sur  $\mathbb{R}^n$ .
3. Faire de même avec  $d(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$ .

[002494]

### Exercice 2

---

Décrire la boule de centre l'origine et de rayon 1 dans les espaces suivants :

1.  $\mathbb{R}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$ .
2.  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance  $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ .
3.  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance  $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ .
4.  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance  $d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

Montrez que les 3 dernières distances sont équivalentes.

[Correction ▼](#)

[002495]

### Exercice 3

---

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont continues. Montrez que l'application  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$  est une norme sur  $E$ . Montrez que  $E$  n'est pas complet.

[Correction ▼](#)

[002496]

### Exercice 4

---

Étudiez la continuité des applications suivantes :

1.  $f(x) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ .
2.  $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ .
3.  $f(x) = \frac{\exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$ .

[002497]

### Exercice 5

---

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés réels et  $f : E \rightarrow F$  une application bornée sur la boule unité de  $E$  et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Montrez que  $f$  est linéaire continue.

[Correction ▼](#)

[002498]

### Exercice 6

---

Soient  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $\mathbb{R}^2$  et  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ . On définit la norme de  $M$  (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante :

$$\|M\| = \sup_{X \in S_1(0,1)} \|M.X\|_2$$

où  $S_1(0,1)$  est la sphère unité pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . Dans chacun des cas suivant, calculez la norme de  $M$ .

1.  $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sup(|x|, |y|)$ .
2.  $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
3.  $\|(x,y)\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\|(x,y)\|_2 = \sup(|x|, |y|)$ .

Correction ▼

[002499]

### Exercice 7

Continuité sur  $\mathbb{R}^2$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2.  $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
3.  $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

[002500]

### Exercice 8

Calculez la norme des opérateurs suivants :

1. Le shift sur  $l^\infty$  défini par  $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$  (sur  $l^\infty$  on définit  $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ ).
2.  $X = \mathcal{C}([0,1])$  avec la norme sup et l'opérateur  $Tf(x) = f(x)g(x)$  où  $g \in X$ .
3.  $X = \mathcal{C}([0,1])$  muni de la norme sup et  $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  où  $g \in X$  est une fonction qui s'annule qu'en  $x = 1/2$ .
4.  $X = l^2$  et  $u(x) = \sum a_n x_n$  où  $(a_n)$  est dans  $X$ .
5.  $X$  l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ .

Correction ▼

[002501]

### Exercice 9

Soit  $X = \mathcal{C}([0,1])$  avec la norme  $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$ . Montrez que la forme linéaire  $T : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $T(f) = f(0)$  n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de  $X$  nulles en 0?

[002502]

## Correction de l'exercice 2 ▲

1. On a par définition  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; |x - 0| = |x| < 1\} = ]-1, 1[$ .
2. C'est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $B_1(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$  c'est le disque de centre l'origine et de rayon 1.
3.  $B_2(0, 1) = \{(x, y); |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ . C'est un carré.
4.  $B_3(0, 1) = \{(x, y); |x| + |y| < 1\}$ . Dans le quart de plan  $P^{++} = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$ , on a  $B_3(0, 1) \cap P^{++} = \{(x, y) \in P^{++}; x + y < 1\}$  c'est le triangle délimité par les droites  $x = 0, y = 0$  et  $x + y = 1$ . En faisant de même pour les 3 autres secteurs du plan, on trouve que  $B_3(0, 1)$  est un losange (ou carré) dont les sommets sont les points  $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$ .

Toutes ces distances étant invariantes par translation (ce sont des normes), il suffit de montrer que les normes associées  $\|\cdot\|_i = d_i((x, y), 0)$  sont équivalentes.

On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq \sqrt{\sup(x^2, y^2) + \sup(x^2, y^2)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\sup(x^2, y^2)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{(\sup(|x|, |y|))^2} \leq \sqrt{2} \|(x, y)\|_2 \end{aligned}$$

. De plus,

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{\sup(x^2, y^2)} \\ &\geq \sqrt{(\sup(|x|, |y|))^2} \geq \sup(|x|, |y|) \geq \|(x, y)\|_2. \end{aligned}$$

Les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont donc équivalentes.

De même on montre que

$$\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_3 \leq 2\|\cdot\|_2.$$

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

Il faut trouver une suite de Cauchy de fonctions de  $E$  qui ne converge pas dans  $E$ . Il suffit, par exemple, de prendre une suite de fonctions  $\{f_n\}$  convergeant pour  $\|\cdot\|$  vers une fonction non continue. Par exemple, prendre

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 1 - n(x - 1/2) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{si } x > 1/2 + 1/n \end{cases}$$

et

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 0 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

On a alors  $\|f_n - f_0\|_1 = 1/(2n)$ , la suite converge simplement et en norme  $\|\cdot\|$  vers la fonction  $f_0$  qui n'est pas continue. Il suffit de montrer alors qu'il n'existe aucune fonction continue  $g$  telle que  $\|f - g\| = 0$  ce qui interdit l'existence d'une limite à  $f_n$  dans  $E$ .

---

## Correction de l'exercice 5 ▲

On montre par récurrence que  $f(nx) = nx$  si  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer  $f(-x) = -f(x)$  pour arriver à  $f(nx) = nf(x)$  si  $n \in \mathbb{Z}$  puis  $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$   $p, q \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $f$  est linéaire sur  $\mathbb{Q}$ . Il reste à montrer qu'elle l'est sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il reste à montrer que  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ . Prenons  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ . On a alors

$$f(\lambda x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x).$$

Soit  $c_n \in \mathbb{Q}$  tel que

$$\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E \leq c_n \leq 2\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E.$$

Alors

$$f((\lambda - \lambda_n)x) = f\left(c_n \frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x\right) = c_n f\left(\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x\right)$$

et

$$\left\| \frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x \right\| \leq 1.$$

L'application  $f$  étant borné sur la boule unité par une constante  $M > 0$ , on a

$$\|f((\lambda - \lambda_n)x)\| \leq c_n M$$

et donc

$$\|f((\lambda - \lambda_n)x)\| \leq c_n M \leq 2M\|(\lambda - \lambda_n)x\|_E$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f((\lambda - \lambda_n)x) = 0$$

, en remarquant qu'on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

on obtient

$$f(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $X = (x, y)$ , on a  $M.X = (ax + by, cx + dy)$  or

$$|ax + by| \leq |ax| + |by| \leq (|a| + |b|) \sup(|x|, |y|) \leq (|a| + |b|) \|(x, y)\|_1.$$

de même,

$$|cx + dy| \leq (|c| + |d|) \|(x, y)\|_1.$$

Par conséquent

$$\|M.X\|_2 \leq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|) \|(x, y)\|_1$$

et donc

$$\|M\| \leq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|).$$

Supposons  $|a| + |b| \geq |c| + |d|$  (inverser l'ordre sinon) et prenons  $X_0 = (a/|a|, b/|b|)$  (on suppose  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  sinon vérification facile). On a alors  $\|X_0\|_1 = 1$  et

$$\|M.X_0\|_2 = \sup(|a| + |b|, |ca/|a| + db/|b||) \geq |a| + |b|.1 \geq (|a| + |b|) \|X_0\|_1$$

et donc

$$\|M\| \geq \sup(|a| + |b|, |c| + |d|)$$

et finalement

$$\|M\| = \sup(|a| + |b|, |c| + |d|)$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit  $x$  une suite, on a

$$\|S(x)\|_\infty = \text{Max}(\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n-1}|, 0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 1 \cdot \|x\|_\infty.$$

Donc  $\|S\| = 1$ .

2. Soit  $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} f(x)g(x) \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Donc

$$\|T\| \leq \|g\|_\infty.$$

Or

$$\|T1\|_\infty = \|g\|_\infty = \|1\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Donc

$$\|T\| \geq \|g\|_\infty$$

et finalement on a bien

$$\|T\| = \|g\|_\infty.$$

3. Soit  $f \in \mathcal{C}([0,1])$ , on a

$$\|u(f)\| = \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \leq \|g\|_\infty \|f\|.$$

On a donc

$$\|u\| \leq \|g\|_\infty.$$

Comme  $g$  ne s'annule qu'au point  $x = 1/2$ , elle ne change de signe qu'une seule fois. Soit

$$f_0 = g/|g|,$$

cette fonction n'est pas continue (ni définie) en  $x = 1/2$  mais vérifie  $f_0g = |g|$ . Prenons  $f_n = g/|g|$  si  $|x - 1/2| > 1/n$ , pour  $|x - 1/2| \leq 1/n$ , on relie les deux segments du graphe par une ligne. Alors  $1 - 1/(2n) \leq \|f_n\| \leq 1$  et

$$\begin{aligned} \|u(f_n)\| &= \left| \int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-1/2|\leq 1/n} f_n(x)g(x)dx \right| \geq \\ &= \left| \int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx - \int_{|x-1/2|\geq 1/n} f_n(x)g(x)dx \right| \\ &\geq \|g\|_\infty \int_{|x-1/2|>1/n} |f_n(x)|dx - 2/n \|g\|_\infty \geq \|g\|_\infty (\|f_n\| - 2/n). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u\left(\frac{f_n}{\|f_n\|}\right)\| \geq \|g\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2n\|f_n\|}\right) \geq \|g\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2n(1-1/2n)}\right) \geq \|g\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)$$

et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\|u\| \geq \|g\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right),$$

en faisant tend  $n$  vers l'infini

$$\|u\| \geq \|g\|_\infty$$

ce qui montre la deuxième inégalité et on obtient  $\|u\| = \|g\|_\infty$ .

4. si on prend  $(x_n) = (a_n)$  on obtient

$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = \|(a_n)\|_2^2 = \|(a_n)\|_2 \cdot \|(a_n)\|_2$$

et donc

$$\|u\| \geq \|(a_n)\|_2.$$

Or D'après Cauchy-Schwartz, on a

$$\|u(a_n)\| = |u(a_n)| = \left| \sum a_n x_n \right| \leq \|(a_n)\|_2 \|(x_n)\|_2$$

et donc  $\|u\| \leq \|(a_n)\|_2$  d'où l'égalité

$$\|u\| = \|(a_n)\|_2.$$

5. Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on a  $|x_j| \leq \|x_n\|_\infty$  et par conséquent

$$|u(x_n)| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \right| \leq \|x_n\|_\infty$$

et donc

$$\|u\| \leq 1.$$

Prenons la suite  $(x^0)$  définie par  $x_n^0 = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$|u(x^0)| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} 1 \right| = 1 = \|x^0\|_\infty$$

et donc

$$\|u\| \geq 1$$

d'où l'égalité  $\|u\| = 1$ .

---