Enoncés et corrections : A. Bodin

Devoir maison : les espaces ultramétriques

Exercice 1

Soit (E,d) un espace métrique. On dit que d est *ultramétrique* si elle vérifie :

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \qquad d(x,z) \leqslant \sup\left(d(x,y), d(y,z)\right).$$

Cette inégalité entraine évidemment l'inégalité triangulaire.

1. Montrer que E muni de la distance d définie par
$$d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y, \qquad d(x,x) = 0$$
est un espace ultramétrique.

   On suppose maintenant que (E,d) est ultramétrique.
2. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$, on a $d(x,z) = \sup\left(d(x,y), d(y,z)\right)$.
3. Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est une partie à la fois ouverte et fermée.
4. Montrer que si deux boules ont un point commun l'une est contenue dans l'autre. Montrer de plus que si ces boules ont même rayon et sont toutes les deux des boules ouvertes (resp. fermées) elles sont confondues.
5. Montrer que si deux boules ouvertes distinctes B_1, B_2 de rayon r sont contenues dans une boule fermée de même rayon, alors leur distance est égale à r :
$$d(B_1,B_2) := \inf_{(a,b)\in B_1\times B_2} d(a,b) = r.$$

Correction ▼ [002422]

Exercice 2

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $\nu(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Pour $x = \pm\frac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, on définit $\nu(x) = \nu(a) - \nu(b)$.

1. Montrer que $\nu(x)$ est indépendant du choix de la représentation $\pm\frac{a}{b}$.
2. Montrer que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$ pour $x, y \in \mathbb{Z}$, puis pour $x, y \in \mathbb{Q}$.
4. Montrer que sur $\mathbb{Q}$, d définie par :
$$d(x,y) = p^{-\nu(x-y)} \text{ si } x \neq y, \qquad d(x,x) = 0$$
est une distance ultramétrique.

Correction ▼ [002423]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Comme $d(x,y) = 1$, si $x \neq y$, on a donc que $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. De plus, comme la relation $x \neq y$ est symétrique, on $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in E$. Soient $x,y,z \in E$, supposons $x = z$; ou bien $y = x$ ou bien y est distinct de x. Dans le premier cas, $d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 0$ et $d(x,z) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. Dans le second cas, $d(x,y) = 1$, d'où

$$0 = d(x,x) = d(x,z) < \sup(d(x,y),d(x,y)) = 1.$$

Supposons $x \neq z$; ou y est distinct de x et de z, ou alors on a l'une des possibilités : $y = x$ ou $y = z$. Si les trois éléments sont deux à deux distincts, l'inégalité est trivialement vérifée ($1 = 1$!). Sinon, $d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, d'où

$$1 = d(x,z) \leqslant \sup(d(x,y),d(y,z)).$$

2. On suppose que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Supposons alors que $d(x,z) < \sup(d(x,y),d(y,z))$ et pour fixer les idées que $d(x,y) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. Alors $d(y,z) < d(x,y)$ et $d(x,z) < d(x,y)$, d'où on déduit que $\sup(d(x,z),d(z,y)) < d(x,y)$. Par ailleurs, $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,z),d(z,y))$. Les deux dernières inégalités sont contradictoires.

3. Soit $B_d(a,r)$ une boule ouverte ; montrons qu'elle est fermée. Soit $y \in E \setminus B_d(a,r)$; montrons qu'il existe une boule ouverte $B_d(y,\eta)$, contenue dans $E \setminus B_d(a,r)$. Si on choisit $\eta = r/2$ ou plus généralement $\eta < r$, on obtient que, pour tout $z \in B_d(y,\eta)$,

$$d(a,z) \leqslant \sup(d(a,y),d(y,z)) \leqslant \sup(d(a,y),\eta)).$$

Comme $d(a,y) \geqslant r$ et $d(y,z) < \eta < r$, on a , (d'après la deuxième question), $d(a,z) = d(a,y) \geqslant r$. On en déduit que $B_d(y,\eta) \subset E \setminus B_d(a,r)$ et par suite la boule ouverte $B_d(a,r)$ est aussi fermée.

La preuve du fait que la boule fermée $B'_d(a,r)$ est aussi ouverte est analogue.

4. Soient $B_d(a,r)$ et $B_d(b,s)$ deux boules ouvertes ayant une intersection non vide et soit $z_0 \in B_d(a,r) \cap B_d(b,s)$. supposons que $r \leqslant s$ et montrons qu'alors $B_d(a,r) \subset B_d(b,s)$. On regarde la distance à b de tout $z \in B_d(a,r)$:

$$d(b,z) \leqslant \sup(d(b,z_0),d(z_0,z)) < \sup(s,d(z_0,z))$$

puisque z_0 est dans $B_d(b,s)$. Par ailleurs, on a : $d(z_0,z) \leqslant \sup(d(z_0,a),d(a,z)) < r$. On obtient une majoration de $d(b,z)$: $d(b,z) < \sup(r,s) = s$, d'où une inclusion de $B_d(a,r)$ dans $B_d(b,s)$.

Conséquence : deux boules ouvertes de même rayon r qui se rencontrent sont confondues.

5. Soient $A = B_d(a,r)$ et $B = B_d(b,r)$ deux boules ouvertes de rayon r contenues dans une boule fermée $C = B'_d(c,r)$ de même rayon. Montrons que :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad r \leqslant d(a,b) \leqslant r.$$

L'inégalié ultramétrique montre que $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,c),d(c,y))$ et ce sup est inférieure à r puisque chacune des boules A et B est incluse dans C. Donc $d(x,y) \leqslant r$.

Par ailleurs, introduisons dans l'estimation de $d(x,y)$ le centre des boules respectives auxquelles ils appartiennent : $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,a),d(a,y))$. Si $d(x,a) = d(a,y)$, on aurait $d(a,y) < r$ et y serait dans A, ce qui est impossible, A et B étant disjoints d'après la quatrième question. Donc $d(a,y) \neq d(x,a)$, et en fait $d(a,y) > d(x,a)$ et

$$d(x,y) = d(a,y).$$

On voit donc que dans le calcul de la distance $d(x,y)$ on peut remplacer x ou y par le centre de la boule ouverte à laquelle il appartient. Par suite

$$d(x,y) = d(a,b) \geqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Et finalement

$$r \leqslant d(x,y) \leqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

d'où $d(A,B) = r$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit $x = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{a'}{b'}$. On écrit $a = p^{\alpha}a_1$, $b = p^{\beta}b_1$,... Alors l'équation $ab' = a'b$ devient $p^{\alpha+\beta'}a_1b'_1 = p^{\alpha'+\beta}a'_1b_1$. Donc $\alpha+\beta' = \alpha'+\beta$ ou encore $\alpha-\beta = \alpha'-\beta'$. Donc $\nu(\pm\frac{a}{b}) = \nu(\frac{a'}{b'})$.
2. Soit $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ et les numérateurs et dénominateurs de $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ non divisibles par p. Alors $xy = p^{\alpha+\beta}x_1y_1$. Donc $\nu(xy) = \alpha+\beta = \nu(x)+\nu(y)$.
3. Soit $x,y \in \mathbb{Z}$, $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$. Supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta$, alors $x+y = p^{\alpha}(x_1+p^{\beta-\alpha}y_1)$, avec $x_1+p^{\beta-\alpha}y_1 \in \mathbb{Z}$. Donc $\nu(x+y) \geqslant \alpha = \min(\nu(x),\nu(y))$.
   Soit maintenant $x = \frac{a}{b}, y = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$. Alors
$$\begin{aligned}
\nu(x+y) &= \nu(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}) \\
&= \nu(\frac{ab'+a'b}{bb'}) \\
&= \nu(ab'+a'b)-\nu(bb') \\
&\geqslant \min(\nu(ab'),\nu(a'b))-\nu(bb') \qquad \text{(grâce à l'inégalité sur les entiers),} \\
&\geqslant \min(\nu(a)+\nu(b'),\nu(a')+\nu(b))-\nu(b)-\nu(b') \\
&\geqslant \min(\nu(a)+\nu(b')-\nu(b)-\nu(b'),\nu(a')+\nu(b)-\nu(b)-\nu(b')) \\
&\geqslant \min(\nu(a)-\nu(b),\nu(a')-\nu(b')) \\
&\geqslant \min(\nu(x),\nu(y)).
\end{aligned}$$
4. Il est clair que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et que $d(x,y) = d(y,x)$. Pour un triplet (x,y,z) on a
$$\begin{aligned}
d(x,z) &= p^{-\nu(x-z)} \\
&= p^{-\nu(x-y+y-z)} \\
&\leqslant p^{-\min(\nu(x-y),\nu(y-z))} \\
&\leqslant \max(p^{-\nu(x-y)},p^{-\nu(y-z)}) \\
&\leqslant \max(d(x,y),d(y,z)).
\end{aligned}$$