



Devoir maison : notion de topologie

Exercice 1

Soit $X = \{a, b, c, d\}$. Lesquelles parmi les collections de sous-ensembles suivants déterminent une topologie sur X ? Justifier.

1. $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$;
2. $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$;
3. $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.

Correction ▼

[002418]

Exercice 2

Soit \mathbb{R} et soit \mathcal{T} une collection de sous-ensembles de \mathbb{R} contenant \emptyset, \mathbb{R} et tous les complémentaires d'ensembles finis. Est-ce une topologie sur \mathbb{R} ? Est-ce une topologie séparée ?

Correction ▼

[002419]

Exercice 3

On appelle *base* d'une topologie \mathcal{T} un sous-ensemble \mathcal{B} de \mathcal{T} tel que tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ s'écrit comme $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathcal{B}$ pour tout $i \in I$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathcal{T} si et seulement si pour tout ouvert \mathcal{O} et tout point $x \in \mathcal{O}$ il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset \mathcal{O}$.
2. Soit \mathcal{T}_n la topologie sur \mathbb{R}^n induite par la métrique euclidienne

$$\text{dist}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Montrer que l'ensemble \mathcal{B} de boules ouvertes ayant leur centre dans \mathbb{Q}^n et leur rayon dans \mathbb{Q} est une base de \mathcal{T}_n .

3. Soit \mathcal{B}' l'ensemble de parallélépipèdes ouverts dans \mathbb{R}^n dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Est-ce que \mathcal{B}' est une base de \mathcal{T}_n ?
4. Est-ce que $\{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{]b, +\infty[; b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour \mathcal{T}_1 ?
5. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on note par δ_a la droite d'équation $y = ax$ dans \mathbb{R}^2 , et on note par Y la réunion des droites δ_a . Soit \mathcal{T} la topologie sur Y induite par la topologie sur \mathbb{R}^2 et soit \mathcal{T}' la topologie de base \mathcal{B}' composée par tous les segments ouverts $]M, N[\subset \delta_a$, $O \notin]M, N[$, et par toutes les réunions $\bigcup_{a \in \mathbb{Q}, O \in]M_a, N_a[}]M_a, N_a[$. Les deux topologies \mathcal{T} et \mathcal{T}' sont-elles équivalentes ?

Correction ▼

[002420]

Exercice 4

Soit X un espace muni d'une métrique $\text{dist} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ alors $\text{dist}'_f(x, y) = f(\text{dist}(x, y))$ est une métrique sur X .
2. Montrer que

$$\text{dist}'(x, y) = \frac{\text{dist}(x, y)}{1 + \text{dist}(x, y)}, \forall x, y,$$

est une métrique sur X .

3. Montrer que les métriques dist et dist' sont topologiquement équivalentes.

[Correction ▼](#)

[002421]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. définit une topologie.
2. ne définit pas une topologie, car $\{a\} \cup \{b, d\} = \{a, b, d\}$ n'est pas dans la collection.
3. ne définit pas une topologie, car $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\}$ n'est pas dans la collection.

Correction de l'exercice 2 ▲

Il faut donc démontrer que la collection de sous-ensembles de \mathbb{R} contenant \emptyset , \mathbb{R} et tous les ensembles finis vérifie les propriétés d'une collection d'ensembles fermés :

- toute intersection d'ensembles fermés est fermé ;
- toute réunion finie d'ensembles fermés est fermé ;
- \emptyset et tout l'espace sont des fermés.

Les trois propriétés sont évidemment vérifiées dans ce cas.

La topologie ainsi définie sur \mathbb{R} n'est pas séparée. En effet deux ouverts non-vides Ω et Ω' sont sous la forme $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ et $\Omega' = \mathbb{R} \setminus F'$, où F, F' sont ou bien finis ou bien vides. Alors $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{R} \setminus (F \cup F')$ n'est pas vide, car sinon ceci impliquerait que $\mathbb{R} = F \cup F'$ est finie ou vide, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Supposons que \mathcal{B} est une base de \mathcal{T} , et soit \mathcal{O} un ouvert arbitraire dans \mathcal{T} et x un point de \mathcal{O} . L'ouvert \mathcal{O} s'écrit comme $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathcal{B}$ pour tout $i \in I$. En particulier il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0}$.
2. Réciproquement, si \mathcal{O} est un ouvert arbitraire, pour tout point $x \in \mathcal{O}$ il existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathcal{O}$. Par conséquent $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B_x$.
3. Il suffit de montrer la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_n$ et soit x un point arbitraire de \mathcal{O} . D'après le cours, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$. *Remarque.* Une autre manière de formuler ceci est de dire que l'ensemble des boules ouvertes euclidiennes forme une base de la topologie \mathcal{T}_n .
Puisque l'ensemble \mathbb{Q}^n est dense dans \mathbb{R}^n , il s'ensuit que $B(x, \frac{r}{2})$ contient un vecteur $q \in \mathbb{Q}^n$. En particulier $\text{dist}(x, q) < \frac{r}{2}$, d'où $B(q, \frac{r}{2}) \subset B(x, r) \subset \mathcal{O}$.
L'intervalle $]\text{dist}(x, q), \frac{r}{2}[$ est non-vide, donc il contient un nombre rationnel R . Ainsi $x \in B(q, R) \subset B(q, \frac{r}{2}) \subset \mathcal{O}$.
4. Puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}_n$, ce qu'il reste à démontrer est à nouveau la propriété énoncée dans (1). Soit \mathcal{O} un ouvert et $x \in \mathcal{O}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$.

D'après le cours

$$\text{dist}(y, x) = \|y - x\|_2 \leq \sqrt{n} \|y - x\|_\infty.$$

Il s'ensuit que

$$B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{y; \|y - x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\} \subset B(x, r) \subset \mathcal{O}. \quad (1)$$

Or $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ n'est rien d'autre que le cube de centre de symétrie x et de longueur des arêtes $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. En particulier $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \in \mathcal{B}'$.

On conclut que \mathcal{B}' est une base de \mathcal{T}_n .

5. Soit $]0, 1[\in \mathcal{T}_1$. Il n'existe pas d'intervalle de la forme $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, ou $]b, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}$, contenu dans $]0, 1[$. Donc \mathcal{B}'' n'est pas une base pour \mathcal{T}_1 .
6. Supposons que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. En particulier $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$.

Pour tout $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, où $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, p.g.c.d. $(m, n) = 1$, on choisit M_a, N_a deux points sur la droite δ_a tels que $O \in]M_a, N_a[$ et $\text{dist}(O, M_a) = \text{dist}(O, N_a) = \frac{1}{n}$. Pour $a = 0$ on choisit $M_0 = (1, 0)$, $N_0 = (-1, 0)$. Soit

$$\mathcal{C} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}}]M_a, N_a[.$$

Par hypothèse $\mathcal{C} \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$. En particulier, puisque O est un point de \mathcal{C} , il existe $r > 0$ tel que $Y \cap B(O, r) \subset \mathcal{C}$. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on a donc $\delta_a \cap B(O, r) \subset]M_a, N_a[$, d'où $r < \text{dist}(O, M_a) = \frac{1}{n}$. Comme ceci est vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que $r \leq 0$, ce qui contredit le choix de r .

On a obtenu une contradiction. Donc on ne peut pas avoir $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On vérifie facilement les trois propriétés de métrique.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. On a que $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, donc la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+ . L'inégalité $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ est équivalente à

$$\frac{1}{x+y+1} \geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+1} + 1 \geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow 1+x+y \leq (1+x)(1+y).$$

La dernière égalité est évidemment vérifiée pour $x \geq 0, y \geq 0$.

3. D'après le cours, la métrique dist et la métrique $\text{dist}_2 = \min(\text{dist}, 1)$ sont topologiquement équivalentes. Ainsi il suffit de montrer que dist_1 et dist_2 sont topologiquement équivalentes.

Puisque $1 + \text{dist} \geq 1$, on a que $\text{dist}_1 \leq \text{dist}$. Aussi $\text{dist}_1 \leq 1$, d'où $\text{dist}_1 \leq \text{dist}_2$.

La fonction f étant croissante, pour tout x, y on a que $\text{dist}_1(x, y) = f(\text{dist}(x, y)) \geq f(\text{dist}_2(x, y))$. D'autre part, $\text{dist}_2(x, y) \leq 1$ implique $f(\text{dist}_2(x, y)) = \frac{\text{dist}_2(x, y)}{1 + \text{dist}_2(x, y)} \geq \frac{\text{dist}_2(x, y)}{2}$.

On a obtenu que pour tout x, y ,

$$\frac{\text{dist}_2(x, y)}{2} \leq \text{dist}_1(x, y) \leq \text{dist}_2(x, y).$$

Ainsi, les métriques dist_1 et dist_2 sont équivalentes.