Enoncés et corrections : C. Drutu

Devoir maison : notion de topologie

Exercice 1

Soit $X = \{a,b,c,d\}$. Lesquelles parmi les collections de sous-ensembles suivants déterminent une topologie sur X ? Justifier.

1. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$;
2. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,d\}$;
3. $\emptyset$, X, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$.

Correction ▼ [002418]

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{T}$ une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les complementaires d'ensembles finis. Est-ce une topologie sur $\mathbb{R}$? Est-ce une topologie séparée ?

Correction ▼ [002419]

Exercice 3

On appelle *base* d'une topologie $\mathscr{T}$ un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de $\mathscr{T}$ tel que tout ouvert $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$ si et seulement si pour tout ouvert $\mathscr{O}$ et tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset \mathscr{O}$.
2. Soit $\mathscr{T}_n$ la topologie sur $\mathbb{R}^n$ induite par la métrique euclidienne
$$\mathrm{dist}(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\,.$$
Montrer que l'ensemble $\mathscr{B}$ de boules ouvertes ayant leur centre dans $\mathbb{Q}^n$et leur rayon dans $\mathbb{Q}$ est une base de $\mathscr{T}_n$.
3. Soit $\mathscr{B}'$ l'ensemble de parallelipipèdes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Est-ce que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$?
4. Est-ce que $\{]-\infty,a[\ ;\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{]b,+\infty[\ ;\ b\in\mathbb{R}\}$ est une base pour $\mathscr{T}_1$?
5. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on note par δ_a la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$, et on note par Y la réunion des droites δ_a. Soit $\mathscr{T}$ la topologie sur Y induite par la topologie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathscr{T}'$ la topologie de base $\mathscr{B}'$ composée par tous les segments ouverts $]M,N[\subset \delta_a$, $O \notin]M,N[$, et par toutes les reunions $\bigcup_{a\in\mathbb{Q},O\in]M_a,N_a[}]M_a,N_a[$. Les deux topologies $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [002420]

Exercice 4

Soit X un espace muni d'une métrique $\mathrm{dist} : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to R_+$ est une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ alors $\mathrm{dist}_f(x,y) = f(\mathrm{dist}(x,y))$ est une métrique sur X.
2. Montrer que
$$\mathrm{dist}'(x,y) = \frac{\mathrm{dist}(x,y)}{1+\mathrm{dist}(x,y)}\,,\ \forall x,y,$$
est une métrique sur X.

3. Montrer que les métriques dist et dist$'$ sont topologiquement équivalentes.

Correction ▼ [002421]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. définit une topologie.
2. ne définit pas une topologie, car $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\}$ n'est pas dans la collection.
3. ne définit pas une topologie, car $\{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$ n'est pas dans la collection.

Correction de l'exercice 2 ▲

Il faut donc démontrer que la collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les ensembles finis vérifie les propriétés d'une collection d'ensembles fermés :

— toute intérsection d'ensembles fermés est fermé ;
— toute réunion finie d'ensembles fermés est fermé ;
— $\emptyset$ et tout l'espace sont des fermés.

Les trois propriétés sont évidemment vérifiées dans ce cas.
La topologie ainsi définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas séparée. En effet deux ouverts non-vides Ω et Ω' sont sous la forme $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ et $\Omega' = \mathbb{R} \setminus F'$, où F, F' sont ou bien finis ou bien vides. Alors $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{R} \setminus (F \cup F')$ n'est pas vide, car sinon ceci impliquerait que $\mathbb{R} = F \cup F'$ est finie ou vide, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Supposons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$, et soit $\mathscr{O}$ un ouvert arbitraire dans $\mathscr{T}$ et x un point de $\mathscr{O}$. L'ouvert $\mathscr{O}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$. En particulier il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0}$.
2. Réciproquement, si $\mathscr{O}$ est un ouvert arbitraire, pour tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B_x \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathscr{O}$. Par conséquent $\mathscr{O} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} B_x$.
3. Il suffit de montrer la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_n$ et soit x un point arbitraire de $\mathscr{O}$. D'après le cours, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. *Remarque.* Une autre manière de formuler ceci est de dire que l'ensemble des boules ouvertes euclidiennes forme une base de la topologie $\mathscr{T}_n$.
   Puisque l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit que $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ contient un vecteur $q \in \mathbb{Q}^n$. En particulier $\mathrm{dist}(x,q) < \frac{r}{2}$, d'où $B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}$.
   L'intervalle $]\mathrm{dist}(x,q), \frac{r}{2}[$ est non-vide, donc il contient un nombre rationnel R. Ainsi $x \in B(q,R) \subset B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset \mathscr{O}$.
4. Puisque $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}_n$, ce qu'il reste à démontrer est à nouveau la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O}$ un ouvert et $x \in \mathscr{O}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$.
   D'après le cours
   $$\mathrm{dist}(y,x) = \|y-x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|y-x\|_\infty .$$
   Il s'ensuit que
   $$B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{y \,;\, \|y-x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\} \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}. \tag{1}$$
   Or $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ n'est rien d'autre que le cube de centre de symétrie x et de longueur des arêtes $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. En particulier $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \in \mathscr{B}'$.
   On conclut que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$.
5. Soit $]0,1[\in \mathscr{T}_1$. Il n'existe pas d'intervalle de la forme $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, ou $]b, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}$, contenu dans $]0,1[$. Donc $\mathscr{B}''$ n'est pas une base pour $\mathscr{T}_1$.
6. Supposons que $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. En particulier $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$.
   Pour tout $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, où $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, p.g.c.d. $(m,n) = 1$, on choisit M_a, N_a deux points sur la droite δ_a tels que $O \in]M_a, N_a[$ et $\mathrm{dist}(O, M_a) = \mathrm{dist}(O, N_a) = \frac{1}{n}$. Pour $a = 0$ on choisit $M_0 = (1,0)$, $N_0 = (-1,0)$. Soit
   $$\mathscr{C} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}}]M_a, N_a[.$$

Par hypothèse $\mathscr{C} \in \mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$. En particulier, puisque O est un point de $\mathscr{C}$, il existe $r > 0$ tel que $Y \cap B(O,r) \subset \mathscr{C}$. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on a donc $\delta_a \cap B(O,r) \subset]M_a, N_a[$, d'où $r < \mathrm{dist}(O, M_a) = \frac{1}{n}$. Comme ceci est vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que $r \leqslant 0$, ce qui contredit le choix de r.

On a obtenu une contradiction. Donc on ne peut pas avoir $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On vérifie facilement les trois propriétés de métrique.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. On a que $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ est équivalente à
$$\frac{1}{x+y+1} \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+1} + 1 \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow 1 + x + y \leqslant (1+x)(1+y)\,.$$
La dernière égalité est évidemment vérifiée pour $x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\,.$
3. D'après le cours, la métrique dist et la métrique $\mathrm{dist}_2 = \min(\mathrm{dist}, 1)$ sont topologiquement équivalentes. Ainsi il suffit de montrer que dist_1 et dist_2 sont topologiquement équivalentes.
Puisque $1 + \mathrm{dist} \geqslant 1$, on a que $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}$. Aussi $\mathrm{dist}_1 \leqslant 1$, d'où $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}_2$.
La fonction f étant croissante, pour tout x, y on a que $\mathrm{dist}_1(x,y) = f(\mathrm{dist}(x,y)) \geqslant f(\mathrm{dist}_2(x,y))$. D'autre part, $\mathrm{dist}_2(x,y) \leqslant 1$ implique $f(\mathrm{dist}_2(x,y)) = \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{1+\mathrm{dist}_2(x,y)} \geqslant \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2}$.
On a obtenu que pour tout x, y,
$$\frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2} \leqslant \mathrm{dist}_1(x,y) \leqslant \mathrm{dist}_2(x,y)\,.$$
Ainsi, les métriques dist_1 et dist_2 sont équivalentes.
