Enoncés : A. Bodin, V. Mayer Corrections : A. Bodin

Théorème de Stone-Weierstrass – Théorème d'Ascoli

Théorème de Stone-Weierstrass

Exercice 1

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_a^b f(t)t^n\,dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Indication ▼ Correction ▼ [002408]

Exercice 2

Montrer qu'une fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[x]$.

Indication ▼ [002409]

Exercice 3

Soit E un espace compact. Soit f_i, $i = 1,\dots,n$ une famille de n élements de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ qui sépare les points de E. Montrer que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002410]

Exercice 4

Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soit $\mathscr{A}$ l'ensembles des combinaisons linéaires finies $f \in \mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{R})$ de la forme :

$$f(x,y) = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(x)\cdot v_i(y), \quad \text{avec } u_i \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R}), v_i \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que toute fonction de $\mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathscr{A}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002411]

Théorème d'Ascoli

Exercice 5

1. Soit $k > 0$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in]a,b[$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une famille équicontinue.
2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications L-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).

Indication ▼ Correction ▼ [002412]

Exercice 6

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications de E dans F équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers b, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers b, si (x_n) est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
L'équicontinuité est-elle nécessaire ici ?

Indication ▼ Correction ▼ [002413]

Exercice 7

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications équicontinues de E dans F. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, est un fermé.

Correction ▼ [002414]

Exercice 8

Soient (E,d) un espace métrique et $\mathscr{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathscr{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si E est compact et connexe et si $\mathscr{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [002415]

Exercice 9

On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$, $t \in [0,\infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}_b([0,\infty[), \|.\|_\infty)$, l'ensemble des fonctions continues et bornées ? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Indication ▼ Correction ▼ [002416]

Exercice 10

Soit $K : \mathscr{C}([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt$, $k \in \mathscr{C}([a,b]\times[a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Correction ▼ [002417]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Approcher f par une suite de polynômes, et se rappeler que si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors...

Indication pour l'exercice 2 ▲

Raisonner par l'absurde.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Considérer l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pour la deuxième question :

1. Montrer que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
2. Montrer que $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
3. Applique le théorème d'Acoli sur le compact $\bar{B}(0,R)$.
4. Utiliser le procédé diagonal de Cantor ($R = 1, 2, 3, \dots$).

Indication pour l'exercice 6 ▲

Démarrer avec l'inégalité :

$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

Si (f_n) n'est pas équicontinue le résultat peut être faux. Prendre $f_n(x) = (1+x)^n$ et $x_n = \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Pour ouvert et fermé, écrire l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$ en un point x (à fixer).
2. Ascoli...

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Pour l'équicontinuité utiliser le théorème des accroissement finis. Pour la convergence simple montrer que pour t fixé : $f_n(t) = \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})$.
2. Montrer que (f_n) ne converge par vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$ (c'est-à-dire il y a convergence simple mais pas convergence uniforme). Le théorème d'Acoli serait-il faux ?

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ alors par linéarité de l'intégrale et grâce à la relation de l'énoncé :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t)\, dt = 0.$$

La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$ donc par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit P tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f(t)^2 dt| &= \left| \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_a^b |f|
\end{aligned}$$

.

Mais $C = \int_a^b |f|$ est une constante (indépendante de ε et P). Donc on vient de montrer que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leqslant \varepsilon C$ avec pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\int_a^b f^2 = 0$, or f^2 est une fonction continue et positive, son intégrale est nulle donc f est la fonction nulle.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \ldots, f_n)$ alors Φ est continue car les f_i sont continues. Φ est injective : en effet si $x \neq y$ alors comme $\{f_i\}$ sépare les points on a $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, par contraposition Φ est injective. Notons $F = \Phi(E)$ l'image directe de E. Alors $\Phi : E \to F$ est continue et bijective. Comme E est compact alors Φ est un homéomorphisme. Donc E est homéomorphe à F qui est une partie de $\mathbb{R}^n$.

Rappel : Si $\Phi : E \to F$ est continue et bijective et E est un espace compact alors Φ est un homéomorphisme. La preuve est simple : soit K un ensemble fermé de E, comme E est compact alors K l'est aussi. Comme Φ est continue alors $\Phi(K)$ est un compact de F donc un fermé. Mais en écrivant ceci à l'aide de l'application Φ^{-1} nous venons de montrer que pour tout fermé K de E, l'image réciproque de K par Φ^{-1} (qui est $(\Phi^{-1})^{-1}(K) = \Phi(K)$) est un fermé. Donc Φ^{-1} est continue. Donc Φ est un homéomorphisme.

Correction de l'exercice 4 ▲

On cherche à vérifier les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

— Tout d'abord $X \times Y$ est compact, car c'est un produit d'espaces compacts.

— Ensuite $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$: en effet pour $f, g \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f + g \in \mathscr{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathscr{A} \quad \text{ et } f \times g \in \mathscr{A}.$$

— $\mathscr{A}$ sépare les points : soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, soit $u \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ tel que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (clairement une telle fonction existe !), soit v la fonction sur Y constante égale à 1. Alors f définie par $f(x,y) = u(x) \cdot v(y)$ est dans $\mathscr{A}$ et $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$ alors nécessairement $y_1 \neq y_2$ et on fait un raisonnement similaire.

— Pour tout $(x,y) \in X \times Y$ il existe une fonction $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq 0$: prendre la fonction f constante égale à 1 qui est bien dans $\mathscr{A}$.

Par le théorème de Stone-Weierstrass $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour $f \in \mathscr{F}$, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a,b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Donc $|f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors
$$\forall t \in [a,b] \qquad |t - t_0| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0| \leqslant \varepsilon.$$
Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathscr{F}$ en t_0. Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a,b]$ alors $\mathscr{F}$ est équicontinue.
2. (a) Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\|$. Donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ comme ci-dessus on prouve l'équicontinuité de $\mathscr{H}$ en x_0, puis partout.
   (b) Notons $\mathscr{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par hypothèse, $\mathscr{H}(0) \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$. Donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est un fermé de $\bar{B}(0, \sqrt{2})$ qui est compact (nous somme dans $\mathbb{R}^n$), donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est aussi compact, d'où $\mathscr{H}(0)$ relativement compact. Maintenant nous avons $\|f_n(x) - f_n(0)\| \leqslant L\|x - 0\|$. Donc $\|f_n(x)\| \leqslant L\|x\| + \sqrt{2}$. Donc pour x fixé, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$ ce qui implique que $\mathscr{H}(x)$ est relativement compact.
   (c) Comme $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact on ne peut pas appliquer directement le théorème d'Ascoli. Soit $B_R = \bar{B}(0,R)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathscr{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restriction de $\mathscr{H}$ à B_R. Alors par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}_R$ est relativement compact. Donc de la suite $(f_{n|B_R})_n$ on peut extraire une sous-suite convergente (sur B_R).
   (d) Pour $R = 1$ nous extrayons de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur B_1. Pour $R = 2$, nous extrayons de $(f_{\phi_1(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_2(n)})_n$ qui converge sur B_2. Puis par récurrence pour $R = N$, nous extrayons de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_N(n)})_n$ qui converge sur B_N. Alors la suite $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge sur $\mathbb{R}^n$. C'est le procédé diagonal de Cantor. En effet soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $N \geqslant \|x\|$. Alors $x \in B_N$ donc $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge vers $f(x)$, mais $(f_{\phi_n(n)})_{n \geqslant N}$ est extraite de $(f_{\phi_N(n)})_n$ donc $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge également vers $f(x)$. Nous venons de montrer que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplement vers f sur tout $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) Soit (x_n) une suite convergeant vers a, alors
$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$
   (b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $|f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   (c) (f_n) est équicontinue en a, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $(|x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2})$.
   (d) Comme $x_n \to a$ alors il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$ on ait $|x_n - a| < \eta$.
   (e) Donc pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a $|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(f_n(x_n))$ converge vers b.
2. Soit des fonctions réelles définies par $f_n(x) = (1+x)^n$. Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n \to a = 0$. Par contre $f_n(a) = f_n(0) = 1$ pour tout n. Mais $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers e. L'équicontinuité est donc bien nécessaire.

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons G l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. Soit (x_n) une suite d'éléments de G qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer $x \in G$, c'est-à-dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F. Écrivons pour $p, q, n \in \mathbb{N}$,
$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \|f_p(x) - f_p(x_n)\| + \|f_p(x_n) - f_q(x_n)\| + \|f_q(x_n) - f_q(x)\|.$$
Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) est équicontinue en x, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in E \quad \|x - y\| < \eta \quad \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $x_n \to x$ il existe $N \geqslant 0$ tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc

$$\forall p,q \geqslant N \quad \|f_p(x_N) - f_p(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|f_q(x_N) - f_q(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin N étant fixé, $x_N \in G$, la suite $(f_n(x_N))_n$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour $p,q \geqslant N'$ on a,

$$\|f_p(x_N) - f_q(x_N)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le bilan de toute ces inégalités est donc

$$\forall p,q \geqslant N' \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, donc $x \in G$ et G est fermé.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$, alors $\mathscr{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathscr{H}\}$ est bornée, notons M une borne. Écrivons l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (\|x-y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1).$$

Or si $|f(x) - f(y)| < 1$ alors $|f(y)| < |f(x)| + 1 \leqslant M+1$. On a donc montré

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (y \in B(x,\eta) \Rightarrow |f(y)| < M+1).$$

Donc $B(x,\eta) \subset A$. Donc A est ouvert.

(b) Montrons que A est fermé. Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. On reprend $\varepsilon = 1$ et on obtient un η par équicontinuité. Comme $x_n \to x$ alors il existe N tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc pour tout f dans $\mathscr{H}$, $|f(x) - f(x_N)| < 1$; donc $|f(x)| < |f(x_N)| + 1$. Or $x_N \in A$, il existe M tel $|f(x_N)|$ soit bornée par M pour tout f dans $\mathscr{H}$. Donc pour tout $f \in \mathscr{H}$, $|f(x)| < M+1$. Donc $x \in A$. Donc A est fermé.

2. $x_0 \in A$ donc A est non vide, comme A est ouvert et fermé et E est connexe alors $A = E$. donc pour tout $x \in E$, $\mathscr{H}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}$ étant équicontinue et E étant compact alors $\bar{\mathscr{H}}$ est compact.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. (a) Pour $t \geqslant 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\ &= \sin 2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\ &= \sin 2n\pi(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \sin(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) \\ &= \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$. Donc (f_n) converge simplement vers 0.

(b) Pour $n \geqslant 1$,
$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{t+4n^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}.$$
Pour $t \geqslant 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$, alors par l'inégalité des accroissement finis
$$\forall n \geqslant 1 \quad |t-t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t)-f_n(t')| \leqslant \frac{1}{4\pi}|t-t'| < \varepsilon.$$
Donc (f_n) est une famille équicontinue.

2. Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathscr{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathscr{H}(t)} = \mathscr{H}(t) \cup \{0\}$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|.\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour n impair, posons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin\sqrt{9n^2\pi^2} = \sin(3n\pi) = 0$. Pour n pair, on pose $t_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2$ alors
$$f_n(t_n) = \sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 + 4n^2\pi^2} = \sin\sqrt{(\frac{\pi}{2}+2n\pi)^2} = \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1.$$
Donc pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathscr{H}$ soit relativement compact alors de la suite (f_n) on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.
Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. k est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$ donc est uniformément continue. Écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :
$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y,t \in [a,b] \qquad |x-y| < \eta \Rightarrow |k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon'.$$

2. Comme (f_n) est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Fixons $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de k, on obtient un $\eta > 0$ avec pour $|x-y| < \eta$, $|k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$.
Donc pour $|x-y| < \eta$,
$$\begin{aligned} |Kf_n(x) - Kf_n(y)| &\leqslant \int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|\|f_n\|_\infty dt \\ &\leqslant M\int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|dt \\ &\leqslant M\int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)}dt \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$
Ce qui est l'équicontinuité de (Kf_n) en x. Comme ceci est valable quelque soit $x \in [a,b]$ alors (Kf_n) est équicontinue.

3. Notons $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour x donné $\mathscr{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x,t)f_n(t)dt| \leqslant M\int_a^b |k(x,t)|dt$ est bornée indépendamment de $n \in \mathbb{N}$. Donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact.
Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite (Kf_n) on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathscr{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathscr{H}$.)
