Enoncés : V. Mayer Corrections : A. Bodin

Connexité

Exercice 1

Soit X un espace métrique.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant 0$. Prouver que $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ est connexe.

Indication ▼ Correction ▼ [002383]

Exercice 2

Déterminer les parties connexes de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; x \neq y\} \quad \text{et de} \quad \{(z,w) \in \mathbb{C}^2\,; z \neq w\}\,.$$

Correction ▼ [002384]

Exercice 3

Soit A et B des parties de X. On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap \complement A$ sont non vides. Montrer que B coupe la frontière de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002385]

Exercice 4

Notons $T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002386]

Exercice 5

1. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ et qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002387]

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^2$, soit B_a l'ensemble $\{a\} \times]0,1]$ si a est rationnel et $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a est irrationnel. Montrer que $B = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} B_a$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002388]

Exercice 7

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I\ ;\ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que *la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire* (un théorème de Darboux).

Indication ▼ Correction ▼ [002389]

Exercice 8

Soit X un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [002390]

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\ ;\ x > 0\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\overline{A}$ et justifier que $\overline{A}$ est connexe.
3. Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Indication ▼ Correction ▼ [002391]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser la première question pour les deux suivantes.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Utiliser la partition $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$ où $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ est la frontière de A.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Faites un dessin de T. Pour la dernière question, raisonner par l'absurde. Où peuvent s'envoyer les points de la deuxième question ?

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Pour la surjection, pensez à l'exponentielle ou aux sinus et cosinus... Pour l'injection, raisonner par l'absurde et utiliser la connexité du cercle privé d'un point.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la connexité de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Définir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Montrer pour chaque points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g est constante dans un voisinage de ce point, puis faire la même chose pour un point de $\mathbb{Q}$. Conclure.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Faire un dessin !
2. Utiliser le théorème des accroissements finis d'une part. La définition de la dérivée d'autre part.
3. Utiliser l'exercice 1 ou refaire la demonstration.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Faire un dessin !!
2. Voir l'exercice 1.
3. Raisonner par l'absurde. Prendre un chemin qui relie le point $(0,0)$ au point $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ (par exemple). Ce chemin va quitter à un instant t_0 le segment $\{0\} \times [-1,1]$. Chercher une contradiction à ce moment là.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. C'est du cours.
2. Si $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ est continue alors elle induit une application restreinte $f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Donc f est constante sur A. Soit $b \in B$ et soit (a_n) une suite d'éléments de A qui tendent vers b (c'est possible car $B \subset \bar{A}$), alors $f(a_n)$ est constante, par exemple égal à 1, car A est connexe. Mais f est continue sur B, donc $f(b) = \lim f(a_n) = 1$. On montre ainsi que f est constante sur B. Donc B est connexe. (Au passage on a montrer que $\bar{A}$ était connexe.)
3. Soit $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue, où $A = \bigcup A_n$. A_0 est connexe donc f est constante sur A_0 et vaut v_0, de même A_1 est connexe donc f est constante sur A_1 et vaut v_1. Mais pour $a \in A_0 \cap A_1 \neq \varnothing$, on a $f(a) = v_0$ car $a \in A_0$ et $f(a) = v_1$ car $a \in A_1$. Donc $v_0 = v_1$. Donc f est constante sur $A_0 \cup A_1$. Par récurrence f est constante sur A.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Dans $\mathbb{R}^2$ il y a deux composantes connexes : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x > y\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x < y\}$.
2. Dans $\mathbb{C}^2$ il n'y en a qu'une seule : $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,; z \neq w\}$

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons la frontière $\mathrm{Fr} A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Nous avons la partition $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr} A \cup (X \setminus \bar{A})$. Si $B \cap \mathrm{Fr} A = \varnothing$ alors $B \subset \mathring{A} \cup (X \setminus \bar{A})$.
De plus, par hypothèses, $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap \mathrm{Fr} A = \varnothing$ or $\mathring{A} = A \setminus \mathrm{Fr} A$ donc $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. Comme $\mathrm{Fr} A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$ on a $B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A) = \varnothing$. Par hypothèse $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ donc $B \cap (X \setminus \bar{A}) = (B \cap (X \setminus A)) \setminus (B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A)) \neq \varnothing$. Nous avons montrer que B est inclus dans l'union de deux ouverts disjoints $\mathring{A}$ et $X \setminus \bar{A}$, d'intersection non vide avec B, donc B n'est pas connexe. Par contraposition, si B est connexe alors B ne rencontre pas la frontière de A.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. T est compact car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

   Soit $g : T \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Par connexité du segment $[-1,1]$, g est constante sur $\{0\} \times [-1,1]$ (et vaut v) ; g est aussi constante sur $[-1,1] \times \{0\}$ et vaut v'. Mais alors $v = g(0,0) = v'$ donc g est constante sur T. Donc T est connexe.

   Pour $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue. T est compact donc $f(T)$ est compact. T est connexe donc $f(T)$ est connexe. Donc $f(T)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ c'est donc un segment compact.
2. Ce sont les quatre points cardinaux $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$, $E = (1,0)$, $W = (-1,0)$.
3. Par l'absurde, supposons que T soit homéomorphe à une partie I de $\mathbb{R}$, alors il existe un homéomorphisme $f : T \longrightarrow I$. Par le premier point I est un segment compact $I = [a,b]$. $T \setminus \{N\}$ est connexe donc sont image par f, $f(T \setminus \{N\})$ est connexe, mais c'est aussi le segment I privé d'un point. I privé d'un point étant connexe, le point retiré est nécessairement une extrémité. Donc $f(N) = a$ ou $f(N) = b$. Supposons par exemple $f(N) = a$. On refait le même raisonnement avec S, qui s'envoie aussi sur une extrémité, comme f est bijective cela ne peut être a, donc $f(S) = b$. Maintenant $f(E)$ est aussi une extrémité donc $f(E) \in \{a,b\}$. Mais alors f n'est plus injective car on a $f(E) = f(N)$ ou $f(E) = f(S)$. Contradiction.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. (a) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{it}$ est une surjection continue.

   (b) $\mathbb{S}^1$ est un compact connexe donc, par l'absurde, si $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue alors $\psi(\mathbb{S}^1)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment compact I. Soit $y \in \mathring{I}$, comme I est l'image de $\mathbb{S}^1$ alors il existe un unique $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) = y$. L'application f induit alors une bijection continue $f : \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \longrightarrow I \setminus \{y\}$. Mais $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ est connexe alors que son image par f, qui est $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas (car $y \in \mathring{I}$). L'image d'un connexe par une application continue doit être un connexe, donc nous avons une contradiction.

2. Si $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe $f(\mathbb{R}^2) = I$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment (non réduit à un point !). Prenons y un élément de $\mathring{I}$, soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = y$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ est connexe, $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas, et f est une bijection continue entre ces deux ensembles, d'où une contradiction.

Correction de l'exercice 6 ▲

L'ensemble B est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Soit alors $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue et montrons qu'elle est constante. Remarquons que la restriction de f à tout ensemble B_a est constante (B_a est connexe).
On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Nous allons montrer que g est localement constante (on ne sait pas si g est continue).

- Soit $a \notin \mathbb{Q}$ alors on a $(a,0) \in B$, f est une fonction continue et $\{f(a,0)\}$ est un ouvert de $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ est un ouvert de B. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x,y) \in (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[) \times B$ alors $f(x,y) = f(a,0)$. Alors pour $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ on a $g(x) = g(a)$: si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; et si $x \in \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x,\frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. Donc g est localement constante au voisinage des point irrationnels.

- Si $a \in \mathbb{Q}$ et soit $b \in]0,1]$ alors f est continue en (a,b) donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. Si maintenant $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, on prend une suite (x_n) de rationnels qui tendent vers x. Comme f est continue alors $g(a) = g(x_n) = f(x_n,b)$ tend vers $f(x,b) = g(x)$. Donc $g(a) = g(x)$. Nous avons montrer que g est localement constante au voisinage des point rationnels.

- Bilan : g est localement constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, alors g est constante sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. A est connexe car connexe par arcs.

2. Si $z \in g(A)$ alors il existe $(x,y) \in A$ tel que $g(x,y) = z$. Donc $z = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ par le théorème des accroissements finis il existe $t \in]x,y[\subset I$ tel que $z = f'(t)$ donc $z \in f'(I)$. Donc $g(A) \subset f'(I)$.

   Si maintenant $z \in f'(I)$, il existe $y \in I$ tel que $z = f'(y)$, mais par définition de la dérivée $f'(y)$ est la limite de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ quand x tend vers y (et on peut même dire que c'est la limite à gauche, i.e. $x < y$). Donc $f'(y)$ est limite de points de $g(x,y)$ avec $x < y$, donc de points de A. Conclusion $z = f'(y)$ est dans $\overline{g(A)}$, et donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. A est connexe, g est continue sur A donc $g(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. Par l'exercice 1 comme on a

$$g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$$

   avec $g(A)$ connexe alors $f'(I)$ est connexe. Comme $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ c'est un intervalle.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$; soit $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Il existe i_1 tel que $x \in A_{i_1}$ on a aussi $a \in A_{i_1}$ donc il existe une chemin γ_1 qui relie x à a. De même il existe i_2 tel que $x \in A_{i_2}$ et on a également $a \in A_{i_2}$ donc il existe une chemin γ_2 qui relie a à y. Le chemin $\gamma_2 \circ \gamma_1$ relie x à y. Ceci étant valable quelque soient x et y, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Si $(x_1, \sin \frac{1}{x_1})$ et $(x_2, \sin \frac{1}{x_2})$ sont deux points de A alors le graphe au dessus de $[x_1, x_2]$ définie un chemin reliant ces deux points. Plus précisément le chemin est l'application $\gamma : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$. Donc A est connexe par arcs donc connexe.

2. $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. On peut utiliser l'exercice 1 pour montrer que $\bar{A}$ est connexe. Ici nous allons le montrer directement. Supposons, par l'absurde, que $\bar{A} \subset U \cup V$ avec U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ disjoints, d'intersection non vide avec A. Comme $\{0\} \times [-1, 1]$ est connexe il est entièrement inclus dans un des ouverts, supposons qu'il soit inclus dans U. Comme A est connexe alors il est inclus dans un des ouverts, donc il est inclus dans V (car s'il était inclus dans U, tout $\bar{A}$ serait contenu dans U). Trouvons une contradiction en prouvant qu'en fait $U \cap A \neq \varnothing$. En effet U est un ouvert et $(0, 0) \in U$, soit $B((0, 0), \varepsilon)$ une boule contenue dans U. Pour n suffisamment grand on a $x_n = \frac{1}{2\pi n} < \varepsilon$ avec $\sin \frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n = 0$ donc $(x_n, \sin \frac{1}{x_n}) = (x_n, 0)$ est un élément de A et de U. Comme V contient A alors $U \cap V \neq \varnothing$. Ce qui fournit la contradiction.

3. Montrons que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. Soit $O = (0, 0)$ et $P = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ deux points de $\bar{A}$, par l'absurde supposons qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \bar{A}$ tel que $\gamma(0) = O$ et $\gamma(1) = P$. On décompose en coordonnées $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. $\gamma_1^{-1}(\{0\})$ est un fermé car γ_1 est continue et de plus il est non vide car $\gamma_1(0) = 0$. Soit $t_0 = \sup \gamma_1^{-1}(\{0\})$, comme l'ensemble est fermé alors $\gamma_1(t_0) = 0$ et de plus $t_0 < 1$ car $\gamma_1(1) = \frac{1}{2\pi}$.

   On regarde ce qui se passe au temps t_0, c'est l'instant ou notre chemin "quitte" l'ensemble $\{0\} \times [-1, 1]$. Notons $y_0 = \gamma_2(t_0)$. Comme γ_2 est continue en y_0 et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $\eta > 0$ tel que $(|t - t_0| < \eta \Rightarrow |\gamma_2(t) - y_0| < \frac{1}{2})$. Choisissons $t_1 \in]t_0, t_0 + \eta[$. Alors $t_1 > t_0$ donc $\gamma_1(t_1) > 0$. Donc le point $\gamma(t_1) = (\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1))$ est dans A (et plus seulement dans $\bar{A}$).

   Supposons par exemple $y_0 \leqslant 0$, alors quand x parcourt $]\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_1)[$, $\sin \frac{1}{x}$ atteint la valeur 1 une infinité de fois. Donc il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma_2(t_2) = 1$. Donc $\gamma(t_2) = (\gamma_1(t_2), 1)$. Mais comme $|t_2 - t_0| < \eta$ alors $|\gamma_2(t_2) - y_0| = |1 - y_0| > \frac{1}{2}$. Ce qui contredit la continuité de γ_2. Nous avons obtenu une contradiction donc $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs.