



## Compacité

---

### Exercice 1

---

Soit  $X$  un espace métrique.

1. Soit  $A$  et  $B$  deux compacts disjoints dans  $X$ . Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où  $B$  est réduit à un point).
2. Soit  $K$  un compact non vide de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $X$  contenant  $K$ . Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ , on ait l'implication :

$$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U .$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002370]

### Exercice 2

---

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002371]

### Exercice 3

---

Soient  $K, F \subset \mathbb{R}^n$  des parties non vides,  $K$  compact et  $F$  fermé. Montrer qu'il existe  $a \in K$  et  $b \in F$  tel que  $\|a - b\| = \text{dist}(K, F)$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002372]

### Exercice 4

---

Soit  $E$  un espace compact et soit  $(F, d)$  un espace métrique. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout  $y \in E$ , il existe un voisinage  $V_y$  de  $y$  sur lequel  $f$  est bornée. Montrer que  $f$  est bornée sur  $E$ .

[Correction ▼](#)

[002373]

### Exercice 5

---

Soit  $X$  un espace métrique.

1. Soit  $(F_n)_n$  une suite décroissante de fermés de  $X$  et soit  $(x_n)_n$  une suite convergente telle que  $x_n \in F_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n .$$

Donner un exemple pour lequel  $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$ .

2. Soit maintenant  $(K_n)_n$  une suite décroissante de compacts non vides de  $X$ . Vérifier que  $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$  est non vide et que tout ouvert  $\Omega$  qui contient  $K$  contient tous les  $K_n$  à partir d'un certain rang.

[Correction ▼](#)

[002374]

### Exercice 6

---

Soit  $X$  un espace topologique et  $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que l'application  $g : x \in X \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dy$  est continue.

**Exercice 7**

Soit  $E$  un espace normé. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , on note  $A + B$  l'ensemble  $\{a + b ; a \in A \text{ et } b \in B\}$ .

1. Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  est fermé, alors  $A + B$  est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de  $\mathbb{R}^2$  dont la somme n'est pas fermé.

Indication ▼

Correction ▼

[002376]

**Exercice 8**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , l'image réciproque  $f^{-1}(K)$  est compact.

1. Montrer que, si  $f$  est propre, alors l'image par  $f$  de tout fermé de  $\mathbb{R}^n$  est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application  $f$  est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Indication ▼

Correction ▼

[002377]

**Exercice 9**

Soit  $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$ . On munit  $E$  de la métrique  $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$ . Montrer que la boule unité fermée de  $E$  n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de  $l^\infty$  (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Correction ▼

[002378]

**Exercice 10**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique, soit  $(Y, \delta)$  un espace métrique compact et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans  $X \times Y$ . Notons  $p : G \rightarrow X$  et  $q : G \rightarrow Y$  les restrictions des deux projections  $p(x, y) = x$  et  $q(x, y) = y$ . Montrer que  $p$  est un homéomorphisme de  $G$  sur  $X$ . En déduire que  $f$  est continue. [002379]

**Exercice 11**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X, x \neq y.$$

Le but ici est de montrer que  $f$  a un unique point fixe  $p \in X$ .

1. Justifier que  $f$  peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles  $X_n = f^n(X)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forment une suite décroissante de compacts et que  $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$  n'est pas vide.
3. Montrer que  $Y$  est un ensemble invariant, i.e.  $f(Y) = Y$ , et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que  $f$  a un unique point fixe  $p \in X$  et que pour tout  $x_0 \in X$  la suite  $x_n = f^n(x_0) \rightarrow p$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Indication ▼

Correction ▼

[002380]

**Exercice 12**

Soient  $(E, d)$  un espace métrique compact et  $f : E \rightarrow E$  une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in E .$$

On se propose de montrer que  $f$  est une isométrie surjective. Soient  $a, b \in E$  et posons, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$  et  $b_n = f^n(b)$ .

1. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \geq 1$  tel que  $d(a, a_k) < \varepsilon$  et  $d(b, b_k) < \varepsilon$  (Considérer une valeur d'adhérence de la suite  $z_n = (a_n, b_n)$ ).
2. En déduire que  $f(E)$  est dense dans  $E$  et que  $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$  (Considérer la suite  $u_n = d(a_n, b_n)$ ).

[Correction ▼](#)

[002381]

### Exercice 13

On se donne une métrique  $d$  sur  $X = [0, 1]$  telle que l'identité  $i : (X, |\cdot|) \rightarrow (X, d)$  soit continue (i.e. la topologie définie par  $d$  est moins fine que la topologie usuelle de  $X$ ).

1. Montrer que tout sous-ensemble de  $X$  compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par  $d$  ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par  $d$  est la topologie usuelle.

[Correction ▼](#)

[002382]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1. Remarquer si  $U_a$  est un voisinage de  $a$ , alors  $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$ .
  2. Raisonner par l'absurde et construire une suite  $(x_n)$  dont aucun élément n'est dans  $U$  et une suite  $(y_n)$  de  $K$ . Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Utiliser qu'un ensemble  $K$  est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de  $K$  on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de  $K$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Extraire des sous-suites...

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que " $\|f(x)\| \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ " est équivalent à

$$" \forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0, m) \Rightarrow f(x) \notin B(0, M)). "$$

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. ...
  2. Utiliser l'exercice 4.
  3. Montrer  $f(Y) \subset Y$  puis  $Y \subset f(Y)$ .
  4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.
-

## Correction de l'exercice 1 ▲

- (a) Si  $A$  est compact et  $B = \{b\}$  avec  $b \notin A$ . Soit  $a \in A$  alors  $a \neq b$  donc il existe un voisinage ouvert de  $a$ ,  $U_a$  et un voisinage ouvert de  $b$ ,  $V_a$  tels que  $U_a \cap V_a = \emptyset$ . Bien évidemment  $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$ . Comme  $A$  est compact on peut extraire un ensemble fini  $\mathcal{A} \subset A$  tel que  $A \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a =: U^b$ . Notons alors  $V^b := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} V_a$ .  $U^b$  est ouvert comme union d'ouverts et  $V^b$  est ouvert comme intersection finie d'ouverts. De plus  $U^b \cap V^b = \emptyset$ .
  - (b) Maintenant  $B$  est compact. Pour chaque  $b \in B$  le point précédent nous fournit  $U^b$  et  $V^b$  disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de  $A$  et  $b$ . On a  $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$ . On extrait un ensemble fini  $\mathcal{B}$  de telle sorte que  $B \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} V^b =: V'$ .  $V'$  est un voisinage ouvert de  $B$ . Et si  $U' := \bigcap_{b \in \mathcal{B}} U^b$  alors  $U'$  est un ouvert contenant  $A$ , et  $U' \cap V' = \emptyset$ .
2. Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \quad (d(x, K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

En prenant  $r = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  nous obtenons une suite  $(x_n)$  tel que  $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$  et  $x_n \notin U$ . Comme  $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$  alors il existe  $y_n \in K$  tel que  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ . Nous avons une suite  $(y_n)$  dans  $K$  compact donc on peut en extraire une sous-suite  $y_{\phi(n)}$  qui converge ; notons  $\ell$  sa limite, alors  $\ell \in K$  car  $K$  est compact.

Regardons la suite extraite  $(x_{\phi(n)})$ , montrons quelle converge également vers  $\ell$  :

$$d(x_{\phi(n)}, \ell) \leq d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)}, \ell)$$

Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc  $(x_{\phi(n)})$  tend vers  $\ell$ . Soit  $F = X \setminus U$  alors  $F$  est un fermé (car  $U$  est ouvert) et  $(x_{\phi(n)}) \in F$  donc la limite  $\ell$  est dans  $F$  également. Donc  $\ell \notin U$  et comme  $K \subset U$  alors  $\ell \notin K$ . Nous avons montré deux choses contradictoires  $\ell \in K$  et  $\ell \notin K$  ce qui prouve le résultat demandé.

## Correction de l'exercice 2 ▲

Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble  $K$  est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de  $K$  on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de  $K$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente et soit  $\ell$  sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit  $(v_n)$  une suite d'éléments de  $K$ . Si  $(v_n)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon  $(v_n)$  prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente  $(w_n)$  extraite de  $(v_n)$ . Soit  $w_0$  le premier des  $(v_0, v_1, v_2, \dots)$  qui appartient à  $\{u_0, u_1, \dots\}$ . Soit  $w_1$  le premier des  $(v_1, v_2, \dots)$  qui appartient à  $\{u_1, u_2, \dots\}$ . Soit  $w_n$  le premier des  $(v_n, v_{n+1}, \dots)$  qui appartient à  $\{u_n, u_{n+1}, \dots\}$ . Alors  $(w_n)$  est une suite-extraite de  $(v_n)$  et par construction  $(w_n)$  converge vers la limite de  $(u_n)$ , donc vers  $\ell \in K$ .

## Correction de l'exercice 3 ▲

- Notons  $\ell = \text{dist}(K, F)$ . Alors il existe  $(x_n)$  suite d'éléments de  $K$  et  $(y_n)$  suite d'éléments de  $F$  telles que  $\|x_n - y_n\| \rightarrow \ell$ . Comme  $K$  est compact alors on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\phi(n)})$  qui converge dans  $K$ . Notons  $a \in K$  cette limite. Alors la suite extraite  $(y_{\phi(n)})$  est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leq \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

La suite  $(x_{\phi(n)})$  qui converge est donc bornée, et la suite  $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$  qui converge dans  $\mathbb{R}$  (vers  $\ell$ ) est bornée également. Donc la suite  $(y_{\phi(n)})$  est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente  $(y_{\phi \circ \psi(n)})$ . De plus comme  $F$  est fermé alors cette suite converge vers  $b \in F$ . La suite  $(x_{\phi \circ \psi(n)})$  extraite de  $(x_{\phi(n)})$  converge vers  $a \in K$ . Et comme nous avons extrait deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  on a toujours  $\|x_{\phi \circ \psi(n)} - y_{\phi \circ \psi(n)}\| \rightarrow \ell$ . A la limite nous obtenons  $\|a - b\| = \ell$  avec  $a \in K$  et  $b \in F$ .

2. Remarque : si  $K$  était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } y \geq 0\}$  et  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$  nous avons  $d(K, F) = 0$  mais  $K \cap F = \emptyset$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Comme  $E$  est compact et  $E \subset \bigcup_{y \in E} V_y$  il existe un ensemble fini  $\mathcal{Y} \subset E$  tel que  $E \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} V_y$ . Sur chaque voisinage  $V_y$ ,  $f$  est bornée par une constante  $M_y$ . Notons  $M = \max_{y \in \mathcal{Y}} M_y$ . Alors  $f$  est bornée sur  $E$  par  $M$ . En effet pour un élément quelconque  $x \in E$ , il existe  $y \in \mathcal{Y}$  tel que  $x \in V_y$  donc  $f(x)$  est bornée par  $M_y$  donc par  $M$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit  $x = \lim x_n$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ ; montrons que  $x$  est dans  $F_N$ . On a  $x_N \in F_N$ ,  $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$ ,  $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$ , etc. Donc pour tout  $n \geq N$  alors  $x_n \in F_N$ . Comme  $F_N$  est fermé, alors la limite  $x$  est aussi dans  $F_N$ . Ceci étant vrai quelque soit  $N$ , alors  $x \in \bigcap_N F_N$ .

Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans  $\mathbb{R}$ ,  $F_n = [n, +\infty[$ , alors  $\bigcap_n F_n = \emptyset$ .

2. (a) Pour chaque  $n$  on prend  $x_n \in K_n$ , alors pour tout  $n$ ,  $x_n \in K_0$  qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si  $x$  est la limite de cette sous-suite alors  $x \in K$ . Donc  $K$  est non vide.  
 (b) Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

De la suite  $(x_n)$ , on peut extraire une sous-suite  $x_{\phi(n)}$  qui converge vers  $x \in K$ . Or  $x_n \in X \setminus \Omega$  qui est fermé donc  $x \in X \setminus \Omega$ . Comme  $K \subset \Omega$  alors  $x \notin K$  ce qui est contradictoire.

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$ .

1. Pour tout  $y \in [0, 1]$   $f$  est continue en  $(x, y)$  donc il existe un  $U(y)$  voisinage de  $x$  et  $[a(y), b(y)]$  voisinage de  $y$  tel que pour  $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$  on ait  $|f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$ .  
 2. Comme  $[0, 1] \subset \bigcup_{y \in [0, 1]} [a(y), b(y)]$  et que  $[0, 1]$  est un compact de  $\mathbb{R}$  il existe un ensemble fini  $\mathcal{Y}$  tel que  $[0, 1] \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} [a(y), b(y)]$ . De plus quitte à réduire les intervalles on peut supposer qu'ils sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0, 1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_k, 1].$$

3. Notons  $U = \bigcap_{y \in \mathcal{Y}} U(y)$ , c'est un voisinage de  $x$  car l'intersection est finie. Pour  $x' \in U$  nous avons

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x, y) dy - \int_0^1 f(x', y) dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x, y) - f(x', y)| dy \\ &\leq \int_0^{t_1} |f(x, y) - f(x', y)| dy + \int_{t_1}^{t_2} \dots + \int_{t_k}^1 |f(x, y) - f(x', y)| dy \\ &\leq \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \dots + \varepsilon(1 - t_k) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $g$  est continue.

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour montrer que  $A + B$  est fermé, nous allons montrer que toute suite de  $A + B$  qui converge, converge vers un élément de  $A + B$ . Soit  $(x_n)$  une suite de  $A + B$  qui converge vers  $x \in E$ . Alors il existe  $a_n \in A$  et  $b_n \in B$  tel que  $x_n = a_n + b_n$ . Comme  $A$  est compact on peut extraire une sous-suite  $(a_{\phi(n)})$  qui converge vers  $a \in A$ . Alors  $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$  est convergente vers  $x - a$ . Notons  $b = x - a$  comme  $B$  est fermé alors  $b \in B$ . Maintenant  $x = a + b$  donc  $x \in A + B$ .
2. Soit  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ , soit  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ et } x \geq 0\}$ . Alors  $F + G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$  qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons  $f$  propre et soit  $F$  un fermé. Montrons que  $f(F)$  est un fermé. Soit  $(y_n)$  une suite de  $f(F)$  qui converge vers  $y \in \mathbb{R}^n$ . Notons  $K$  l'union de  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $\{y\}$ . Alors  $K$  est compact. Comme  $y_n \in f(F)$ , il existe  $x_n \in F$  tel que  $f(x_n) = y_n$ . En fait  $x_n \in f^{-1}(K)$  qui est compact car  $f$  est propre. Donc de  $(x_n)$  on peut extraire une sous-suite convergente  $(x_{\phi(n)})$ , on note  $x$  la limite de cette sous-suite. Comme  $x_{\phi(n)} \in F$  et que  $F$  est fermé alors  $x \in F$ . Comme  $f$  est continue alors  $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$  tend vers  $f(x)$ , or  $y_{\phi(n)}$  tend aussi vers  $y$ . Par unicité de la limite  $y = f(x)$ . Donc  $y \in f(F)$  et  $f(F)$  est fermé.
2. Dire  $\|f(x)\| \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0, m) \Rightarrow f(x) \notin B(0, M)).$$

- (a) Supposons  $f$  propre, soit  $M > 0$ . Alors  $B(0, M)$  est un compact (nous sommes dans  $\mathbb{R}^n$ ) donc  $f^{-1}(B(0, M))$  est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe  $m > 0$  tel que  $f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$ . Donc si  $x \notin B(0, m)$  alors  $f(x) \notin B(0, M)$ .
- (b) Réciproquement, soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $f$  est continue et que  $K$  est fermé alors  $f^{-1}(K)$  est un fermé. Reste à montrer que  $f^{-1}(K)$  est borné. Comme  $K$  est compact alors il existe  $M > 0$  tel que  $K \subset B(0, M)$ , par hypothèse il existe  $m > 0$  tel que si  $x \notin B(0, m)$  alors  $f(x) \notin B(0, M)$ , ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si  $f(x) \in B(0, M)$  alors  $x \in B(0, m)$ ", donc  $f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$ . Or  $K \subset B(0, M)$  donc  $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$ . Donc  $f^{-1}(K)$  est borné donc compact.

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit  $f_n$  la fonction affine suivante  $f_n(t) = 0$  pour  $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$  et pour  $t \in [\frac{1}{n}, 1]$ . Sur  $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$  on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si  $B$  dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons  $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$  donc  $f_n \notin B$ . Par contre si  $p \neq q$  alors  $d(f_p, f_q) = 1$  donc la suite  $(f_n)$  et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si  $B$  était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.
2. Notons  $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$  la suite de  $l^\infty$  (le 1 est à la  $n$ -ième place). Alors  $x^n$  est dans la boule unité fermée  $B$  centrée en 0. De plus si  $p \neq q$ , alors  $d_\infty(x^p, x^q) = 1$ . Donc toute sous-suite extraite de  $(x_n)$  n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc  $B$  n'est pas compact.

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Si  $f$  a deux points fixes  $x \neq y$ , alors  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ . Ce qui est absurde. Donc  $f$  a au plus un point fixe.
2.  $f$  est continue et  $X$  compact donc  $X_1 = f(X)$  est compact, par récurrence si  $X_{n-1}$  est compact alors  $X_n = f(X_{n-1})$  est compact. De plus  $f : X \rightarrow X$ , donc  $f(X) \subset X$  soit  $X_1 \subset X$ , puis  $f(X_1) \subset f(X)$  soit  $X_2 \subset X_1$ , etc. Par récurrence  $X_n \subset X_{n-1} \subset \dots \subset X_1 \subset X$ . Comme chaque  $X_n$  est non vide alors  $Y$  n'est pas vide (voir l'exercice 4).
3. Montrons d'abord que  $f(Y) \subset Y$ . Si  $y \in Y$ , alors pour tout  $n \geq 0$  on a  $y \in X_n$  donc  $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ . Donc pour tout  $n > 0$ ,  $f(y) \in X_n$ , or  $f(y) \in X_0 = X$ . Donc  $f(y) \in Y$ .  
Réciproquement montrons  $Y \subset f(Y)$ . Soit  $y \in Y$ , pour chaque  $n \geq 0$ ,  $y \in X_{n+1} = f(X_n)$ . Donc il existe  $x_n \in X_n$  tel que  $y = f(x_n)$ . Nous avons construit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $X$  compact, on peut donc en

extraire une sous-suite convergente  $(x_{\phi(n)})$ . Notons  $x$  la limite, par l'exercice 4,  $x \in Y$ . Alors  $y = f(x_{\phi(n)})$  pour tout  $n$  et  $f$  est continue donc à la limite  $y = f(x)$ . Donc  $y \in f(Y)$ .

Soit  $y \neq y' \in Y$  tel que  $d(y, y') = \text{diam} Y > 0$ . Comme  $Y = f(Y)$  alors il existe  $x, x' \in Y$  tel que  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ . Or  $d(y, y') = d(f(x), f(x')) < d(x, x')$ . On a trouvé deux éléments de  $Y$  tel  $d(x, x')$  est strictement plus grand que le diamètre de  $Y$  ce qui est absurde. Donc  $y = y'$  et le diamètre est zéro.

4. Comme le diamètre est zéro alors  $Y$  est composé d'un seul point  $\{p\}$  et comme  $f(Y) = Y$  alors  $f(p) = p$ . Donc  $p$  a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de  $Y$  pour tout point  $x_0 \in X$  la suite  $x_n = f^n(x_0)$  converge vers  $p$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

- Comme  $E \times E$  est compact alors de la suite  $(a_n, b_n)$  on peut extraire une sous-suite  $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$  qui converge vers  $(a_\infty, b_\infty)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que si  $k \geq n$  alors  $d(a_{\phi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $d(b_{\phi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Donc en particulier  $d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_\infty) + d(a_\infty, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$ . La propriété pour  $f$  s'écrit ici  $d(a_k, b_{k'}) \leq d(a_{k+1}, b_{k'+1}) \geq$ . Donc  $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)}, a_0) \leq d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1}, a_1) \leq \dots \leq d(a_{\phi(n+1)-1}, a_{\phi(n)-1}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$ . Donc pour  $k = \phi(n+1) - \phi(n)$ , sachant que  $a_0 = a$  alors  $d(a_k, a) < \varepsilon$ . Même chose avec  $(b_n)$ .
- Soit  $a \in E$  et  $\varepsilon > 0$  alors il existe  $k \geq 1$  tel que  $a_k = f^k(a) \in f(E)$  avec  $d(a, a_k) < \varepsilon$ . Donc  $f(E)$  est dense dans  $E$ .
  - Soit  $u_n = d(a_n, b_n)$ . Alors par la propriété pour  $f$ ,  $(u_n)$  est une suite croissante de  $\mathbb{R}$ . Comme  $E$  est compact alors son diamètre est borné, donc  $(u_n)$  est majorée. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée donc converge vers  $u$ .  
Maintenant  $u_n - u_0 \geq 0$  et
 
$$0 \leq u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a, b) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) - d(a, b) = d(a_n, a) + d(b_n, b).$$
 Donc  $u_n$  tend vers  $u_0$ . Comme  $(u_n)$  est croissante alors  $u_n = u_0$  pour tout  $n$ . En particulier  $u_1 = u_0$  donc  $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$  soit  $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ . Donc  $f$  est une isométrie.
  - $f$  est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitzienne !).  $E$  est compact donc  $f(E)$  est compact donc fermé or  $f(E)$  est dense donc  $f(E) = E$ . Donc  $f$  est surjective

### Correction de l'exercice 13 ▲

Dire que  $i : (X, |\cdot|) \rightarrow (X, d)$  est continue c'est exactement dire que tout ensemble  $U$  ouvert pour  $d$  est ouvert pour  $|\cdot|$  (car  $i^{-1}(U) = U$ ).

- Soit  $K$  un compact pour  $|\cdot|$ . Soit  $U_i, i \in I$  tels que  $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  et tels que  $U_i$  soient des ouverts pour  $d$ . Alors les  $U_i$  sont aussi des ouverts pour la topologie définie par  $|\cdot|$ . Comme  $K$  est compact pour  $|\cdot|$  alors on peut extraire un ensemble fini  $J \subset I$  tel que  $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ . Donc  $K$  est aussi compact pour  $d$ .  
Si  $F$  est un fermé pour  $|\cdot|$  alors  $F \subset [0, 1]$  est compact pour  $|\cdot|$  Donc compact pour  $d$ , donc fermé pour  $d$ .
- Si  $U$  est un ouvert pour  $d$  alors  $U$  est un ouvert pour  $|\cdot|$ . Car  $i$  est continue. Réciproquement si  $U$  est un ouvert pour  $|\cdot|$  alors  $F = X \setminus U$  est un fermé pour  $|\cdot|$  donc  $F$  est un fermé pour  $d$  par la question précédente, donc  $U = X \setminus F$  est un ouvert pour  $d$ . Conclusion les ouverts pour  $|\cdot|$  et  $d$  sont les mêmes donc  $|\cdot|$  et  $d$  définissent la même topologie.