



Compacité

Exercice 1

Soit X un espace métrique.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X . Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K . Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication:

$$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U .$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002370]

Exercice 2

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002371]

Exercice 3

Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \text{dist}(K, F)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002372]

Exercice 4

Soit E un espace compact et soit (F, d) un espace métrique. Soit $f : E \rightarrow F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E .

[Correction ▼](#)

[002373]

Exercice 5

Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n .$$

Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.

2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts non vides de X . Vérifier que $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

[Correction ▼](#)

[002374]

Exercice 6

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dy$ est continue.

Exercice 7

Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E , on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b ; a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de \mathbb{R}^2 dont la somme n'est pas fermé.

Indication ▼

Correction ▼

[002376]

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de \mathbb{R}^n est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante: l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété:

$$\|f(x)\| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \rightarrow \infty .$$

Indication ▼

Correction ▼

[002377]

Exercice 9

Soit $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup)?

Correction ▼

[002378]

Exercice 10

Soit (X, d) un espace métrique, soit (Y, δ) un espace métrique compact et soit $f : X \rightarrow Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \rightarrow X$ et $q : G \rightarrow Y$ les restrictions des deux projections $p(x, y) = x$ et $q(x, y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X . En déduire que f est continue. [002379]

Exercice 11

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X, x \neq y .$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \rightarrow p$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 12

Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in E .$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a, b \in E$ et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Correction ▼

[002381]

Exercice 13

On se donne une métrique d sur $X = [0, 1]$ telle que l'identité $i : (X, |\cdot|) \rightarrow (X, d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par d est moins fine que la topologie usuelle de X).

1. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Correction ▼

[002382]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Remarquer si U_a est un voisinage de a , alors $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$.
 2. Raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) dont aucun élément n'est dans U et une suite (y_n) de K . Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Utiliser qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K .

Indication pour l'exercice 3 ▲

Extraire des sous-suites...

Indication pour l'exercice 7 ▲

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que " $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$ " est équivalent à

$$"\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0, m) \Rightarrow f(x) \notin B(0, M))."$$

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. ...
 2. Utiliser l'exercice 4.
 3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
 4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

- (a) Si A est compact et $B = \{b\}$ avec $b \notin A$. Soit $a \in A$ alors $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert de a , U_a et un voisinage ouvert de b , V_a tels que $U_a \cap V_a = \emptyset$. Bien évidemment $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Comme A est compact on peut extraire un ensemble fini $\mathcal{A} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a =: U^b$. Notons alors $V^b := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} V_a$. U^b est ouvert comme union d'ouverts et V^b est ouvert comme intersection finie d'ouverts. De plus $U^b \cap V^b = \emptyset$.
(b) Maintenant B est compact. Pour chaque $b \in B$ le point précédent nous fournit U^b et V^b disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de A et b . On a $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$. On extrait un ensemble fini \mathcal{B} de telle sorte que $B \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} V^b =: V'$. V' est un voisinage ouvert de B . Et si $U' := \bigcap_{b \in \mathcal{B}} U^b$ alors U' est un ouvert contenant A , et $U' \cap V' = \emptyset$.
2. Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \quad (d(x, K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

En prenant $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons une suite (x_n) tel que $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$ et $x_n \notin U$. Comme $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Nous avons une suite (y_n) dans K compact donc on peut en extraire une sous-suite $y_{\phi(n)}$ qui converge ; notons ℓ sa limite, alors $\ell \in K$ car K est compact.

Regardons la suite extraite $(x_{\phi(n)})$, montrons quelle converge également vers ℓ :

$$d(x_{\phi(n)}, \ell) \leq d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)}, \ell)$$

Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc $(x_{\phi(n)})$ tend vers ℓ . Soit $F = X \setminus U$ alors F est une fermé (car U est ouvert) et $(x_{\phi(n)}) \in F$ donc la limite ℓ est dans F également. Donc $\ell \notin U$ et comme $K \subset U$ alors $\ell \notin K$. Nous avons montrer deux choses contradictoires $\ell \in K$ et $\ell \notin K$ ce qui prouve le résultat demandé.

Correction de l'exercice 2 ▲

Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de K . Si (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon (v_n) prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente (w_n) extraite de (v_n) . Soit w_0 le premier des (v_0, v_1, v_2, \dots) qui appartient à $\{u_0, u_1, \dots\}$. Soit w_1 le premier des (v_1, v_2, \dots) qui appartient à $\{u_1, u_2, \dots\}$... Soit w_n le premier des (v_n, v_{n+1}, \dots) qui appartient à $\{u_n, u_{n+1}, \dots\}$. Alors (w_n) est une suite-extraite de (v_n) et par construction (w_n) converge vers la limite de (u_n) , donc vers $\ell \in K$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Notons $\ell = \text{dist}(K, F)$. Alors il existe (x_n) suite d'éléments de K et (y_n) suite d'éléments de F telles que $\|x_n - y_n\| \rightarrow \ell$. Comme K est compact alors on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans K . Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\phi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leq \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

La suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ qui converge dans \mathbb{R} (vers ℓ) est bornée également. Donc la suite $(y_{\phi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\phi \circ \psi(n)})$. De plus comme F est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\phi \circ \psi(n)})$ extraite de $(x_{\phi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites (x_n) et (y_n) on a toujours $\|x_{\phi \circ \psi(n)} - y_{\phi \circ \psi(n)}\| \rightarrow \ell$. A la limite nous obtenons $\|a - b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

2. Remarque : si K était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } y \geq 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ nous avons $d(K, F) = 0$ mais $K \cap F = \emptyset$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Comme E est compact et $E \subset \bigcup_{y \in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathcal{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage V_y , f est bornée par une constante M_y . Notons $M = \max_{y \in \mathcal{Y}} M_y$. Alors f est bornée sur E par M . En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathcal{Y}$ tel que $x \in V_y$ donc $f(x)$ est bornée par M_y donc par M .

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; montrons que x est dans F_N . On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geq N$ alors $x_n \in F_N$. Comme F_N est fermé, alors la limite x est aussi dans F_N . Ceci étant vrai quelque soit N , alors $x \in \bigcap_N F_N$.

Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans \mathbb{R} , $F_n = [n, +\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \emptyset$.

2. (a) Pour chaque n on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout n , $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si x est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc K est non vide.
 (b) Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

De la suite (x_n) , on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour tout $y \in [0, 1]$ f est continue en (x, y) donc il existe un $U(y)$ voisinage de x et $[a(y), b(y)]$ voisinage de y tel que pour $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$ on ait $|f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$.
 2. Comme $[0, 1] \subset \bigcup_{y \in [0, 1]} [a(y), b(y)]$ et que $[0, 1]$ est un compact de \mathbb{R} il existe un ensemble fini \mathcal{Y} tel que $[0, 1] \subset \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} [a(y), b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles on peut supposer qu'ils sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0, 1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_k, 1].$$

3. Notons $U = \bigcap_{y \in \mathcal{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de x car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x, y) dy - \int_0^1 f(x', y) dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x, y) - f(x', y)| dy \\ &\leq \int_0^{t_1} |f(x, y) - f(x', y)| dy + \int_{t_1}^{t_2} \dots + \int_{t_k}^1 |f(x, y) - f(x', y)| dy \\ &\leq \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \dots + \varepsilon(1 - t_k) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc g est continue.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour montrer que $A + B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A + B$ qui converge, converge vers un élément de $A + B$. Soit (x_n) une suite de $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.
 2. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$, soit $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ et } x \geq 0\}$. Alors $F + G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ qui n'est pas un fermé.
-

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons f propre et soit F un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons K l'union de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors K est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Donc de (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$, on note x la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\phi(n)} \in F$ et que F est fermé alors $x \in F$. Comme f est continue alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers y . Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.
2. Dire $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$ est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0, m) \Rightarrow f(x) \notin B(0, M)).$$

- (a) Supposons f propre, soit $M > 0$. Alors $B(0, M)$ est un compact (nous sommes dans \mathbb{R}^n) donc $f^{-1}(B(0, M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$. Donc si $x \notin B(0, m)$ alors $f(x) \notin B(0, M)$.
 - (b) Réciproquement, soit K un compact de \mathbb{R}^n . Comme f est continue et que K est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme K est compact alors il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0, M)$, par hypothèse il existe $m > 0$ tel que si $x \notin B(0, m)$ alors $f(x) \notin B(0, M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x) \in B(0, M)$ alors $x \in B(0, m)$ ", donc $f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$. Or $K \subset B(0, M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0, M)) \subset B(0, m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.
-

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit f_n la fonction affine suivante $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si B dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$ donc $f_n \in B$. Par contre si $p \neq q$ alors $d(f_p, f_q) = 1$ donc la suite (f_n) et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si B était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.
 2. Notons $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ la suite de l^∞ (le 1 est à la n -ième place). Alors x^n est dans la boule unité fermée B centrée en 0. De plus si $p \neq q$, alors $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Donc toute sous-suite extraite de (x_n) n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc B n'est pas compact.
-

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Si f a deux points fixes $x \neq y$, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Ce qui est absurde. Donc f a au plus un point fixe.

2. f est continue et X compact donc $X_1 = f(X)$ est compact, par récurrence si X_{n-1} est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact. De plus $f : X \rightarrow X$, donc $f(X) \subset X$ soit $X_1 \subset X$, puis $f(X_1) \subset f(X)$ soit $X_2 \subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n \subset X_{n-1} \subset \dots \subset X_1 \subset X$. Comme chaque X_n est non vide alors Y n'est pas vide (voir l'exercice 4).
3. Montrons d'abord que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $y \in X_n$ donc $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc pour tout $n > 0$, $f(y) \in X_n$, or $f(y) \in X_0 = X$. Donc $f(y) \in Y$.
- Réciproquement montrons $Y \subset f(Y)$. Soit $y \in Y$, pour chaque $n \geq 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Donc il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$. Nous avons construit (x_n) une suite d'éléments de X compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Notons x la limite, par l'exercice 4, $x \in Y$. Alors $y = f(x_{\phi(n)})$ pour tout n et f est continue donc à la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(Y)$.
- Soit $y \neq y' \in Y$ tel que $d(y, y') = \text{diam} Y > 0$. Comme $Y = f(Y)$ alors il existe $x, x' \in Y$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or $d(y, y') = d(f(x), f(x')) < d(x, x')$. On a trouvé deux éléments de Y tel $d(x, x')$ est strictement plus grand que le diamètre de Y ce qui est absurde. Donc $y = y'$ et le diamètre est zéro.
4. Comme le diamètre est zéro alors Y est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y) = Y$ alors $f(p) = p$. Donc p a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de Y pour tout point $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p .

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Comme $E \times E$ est compact alors de la suite (a_n, b_n) on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$ qui converge vers (a_∞, b_∞) . Soit $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq n$ alors $d(a_{\phi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\phi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc en particulier $d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_\infty) + d(a_\infty, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. La propriété pour f s'écrit ici $d(a_k, b_{k'}) \leq d(a_{k+1}, b_{k'+1}) \geq$. Donc $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)}, a_0) \leq d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1}, a_1) \leq \dots \leq d(a_{\phi(n+1)-1}, a_{\phi(n)-1}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. Donc pour $k = \phi(n+1) - \phi(n)$, sachant que $a_0 = a$ alors $d(a_k, a) < \varepsilon$. Même chose avec (b_n) .
2. (a) Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $k \geq 1$ tel que $a_k = f^k(a) \in f(E)$ avec $d(a, a_k) < \varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans E .
- (b) Soit $u_n = d(a_n, b_n)$. Alors par la propriété pour f , (u_n) est une suite croissante de \mathbb{R} . Comme E est compact alors son diamètre est borné, donc (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers u .
- Maintenant $u_n - u_0 \geq 0$ et
- $$0 \leq u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a, b) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) - d(a, b) = d(a_n, a) + d(b_n, b).$$
- Donc u_n tend vers u_0 . Comme (u_n) est croissante alors $u_n = u_0$ pour tout n . En particulier $u_1 = u_0$ donc $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$ soit $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$. Donc f est une isométrie.
- (c) f est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitzienne !). E est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E) = E$. Donc f est surjective

Correction de l'exercice 13 ▲

Dire que $i : (X, |\cdot|) \rightarrow (X, d)$ est continue c'est exactement dire que tout ensemble U ouvert pour d est ouvert pour $|\cdot|$ (car $i^{-1}(U) = U$).

1. Soit K un compact pour $|\cdot|$. Soit $U_i, i \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et tels que U_i soient des ouverts pour d . Alors les U_i sont aussi des ouverts pour la topologie définie par $|\cdot|$. Comme K est compact pour $|\cdot|$ alors on peut extraire un ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Donc K est aussi compact pour d .
- Si F est un fermé pour $|\cdot|$ alors $F \subset [0, 1]$ est compact pour $|\cdot|$ Donc compact pour d , donc fermé pour d .

2. Si U est un ouvert pour d alors U est un ouvert pour $|\cdot|$. Car i est continue. Réciproquement si U est un ouvert pour $|\cdot|$ alors $F = X \setminus U$ est un fermé pour $|\cdot|$ donc F est un fermé pour d par la question précédente, donc $U = X \setminus F$ est un ouvert pour d . Conclusion les ouverts pour $|\cdot|$ et d sont les mêmes donc $|\cdot|$ et d définissent la même topologie.
